



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CURVAS QUE LLENAN EL
ESPACIO

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:

Rocio Margarito Carpio

ASESOR DE TESIS:

Dr. Enrique Castañeda Alvarado

El Cerrillo, Piedras Blancas, México
03 de febrero del 2022



Resumen

Una curva que llena el espacio es una función continua y suprayectiva del intervalo cerrado $[0, 1]$ al cuadrado $[0, 1]^2$ y El Teorema de Hahn-Mazurkiewicz nos dice que todo continuo de Peano es una imagen continua del intervalo cerrado $[0, 1]$, es decir, las curvas que llena el espacio son un caso particular de este Teorema.

El objetivo principal de esta tesis es probar el teorema de Hahn-Mazurkiewicz ya que este nos va a asegurar la existencia de las curvas que llenan el espacio, para ello analizaremos algunos resultados referentes a los conceptos de espacios de Peano, Propiedad S, $s(\epsilon)$ -cadena y cadena débil.

Finalmente revisaremos la primera curva que llena el espacio que se dió a conocer en 1890 por Giuseppe Peano, y analizaremos el ejemplo que permitió, por su desarrollo geométrico, la construcción de toda una serie de curvas que llenan el espacio.

Introducción

“La topología es Matemática cualitativa, es decir matemática sin números. Podemos decir a grosso modo, que la topología trata de las propiedades intrínsecas de las configuraciones espaciales, que son independientes del tamaño, la situación y la forma. Una propiedad cualitativa intrínseca es aquella que no cambia cuando el objeto que se está considerando sufre un proceso de dilatación y flexión sin ruptura” [2].

El topólogo considera los mismos objetos que el geómetra, pero de modo distinto; no se fija en las distancias o los ángulos, ni siquiera de la alineación de los puntos. Para el topólogo, un círculo es equivalente a una elipse; una bola no se distingue de un cubo, se dice que la bola y el cubo son objetos topológicamente equivalentes, porque se pasa de uno al otro mediante una transformación continua con inversa continua.

El presente trabajo está dentro del área de la Teoría de Continuos por lo que se espera que el lector posea conocimientos básicos de topología. Conoceremos de manera particular el Teorema de Hahn-Mazurkiewicz el cual fue uno de los descubrimientos más interesantes de la topología, ya que dio pauta a la formación matemática de lo que llamaremos curvas que llenan el espacio.

En 1878, Georg Cantor desarrolló su teoría de conjuntos, a partir de entonces se desarrolla una de las consecuencias más impactantes para ese tiempo; y fue que \mathbb{R} y \mathbb{R}^2 tenían la misma cardinalidad, es decir, “el mismo” número de puntos. Esto quiere decir que existe una biyección entre ambos conjuntos.

Este resultado cuestionó las ideas intuitivas acerca del concepto de dimensión que en ese momento se tenían, y una pregunta obvia fue: ¿Podemos encontrar una biyección entre \mathbb{R} y \mathbb{R}^2 que sea continua o incluso diferencia-

ble? La respuesta en forma negativa se da en 1879 por Eugen Netto, véase [8].

Sin embargo, permaneció abierto durante más de una década, si era posible encontrar una aplicación continua y suprayectiva de \mathbb{R} a \mathbb{R}^2 o, inclusive del intervalo $[0, 1]$ al cuadrado $[0, 1]^2$.

Giuseppe Peano sorprendió a la comunidad matemática en 1890, con la construcción de una función continua y suprayectiva del intervalo $[0, 1]$ al cuadrado $[0, 1]^2$, es decir, construyó lo que llamaremos “curva que llena el espacio”.

El Teorema de Hahn-Mazurkiewicz es uno de los teoremas más famosos de la topología ya que este resuelve la existencia de las curvas que llenan el espacio, que a partir de ahora se podrán describir como aquellas que caracterizan a los espacios topológicos que son imágenes continuas del intervalo cerrado $[0, 1]$, este teorema fue establecido en 1914 por Hahn y Mazurkiewicz, véase [1] y [3].

Este trabajo se desarrolla en tres capítulos. En la medida de lo posible tratamos de evitar ir más allá de estas páginas para comprender todo lo que se menciona en esta tesis. Incluimos, en el Capítulo 1, preliminares donde se tratan algunos conceptos relacionados con topología y continuos, para lo cual nos basamos en [5] y [6]. Además, incluimos algunas definiciones y teoremas que serán importantes para la prueba de algunos teoremas posteriores.

En el Capítulo 2 conoceremos los espacios de Peano, la propiedad S y se explicará el Teorema de Hahn-Mazurkiewicz, para lo cual se tomará como base [6].

Finalmente, en el Capítulo 3, tomando como referencia [8] analizaremos dos curvas que llenan el espacio, la curva que construyó G. Peano y la de D. Hilbert. Para la primera, nos enfocaremos en conocer su construcción análitica la forma en la que la describió Peano y para la segunda, su construcción geométrica.

Índice general

Resumen	2
Introducción	3
1. Preliminares	6
1.1. Continuos	6
1.2. Conexidad local	9
1.3. Conexidad en pequeño	11
1.4. Dendritas	12
1.5. Algunos teoremas y definiciones importantes	16
2. Espacios de Peano y el Teorema de Hahn-Mazurkiewicz	21
2.1. Espacios de Peano	21
2.2. Propiedad S	22
2.3. El Teorema de Hahn-Mazurkiewicz	29
3. Algunas curvas que llenan el espacio	35
3.1. Curva de Hilbert	35
3.1.1. Generación de la curva de Hilbert	35
3.1.2. Una representación compleja	38
3.2. Curva de Peano	41
3.2.1. Definición de la curva de Peano	41
3.2.2. La no diferenciabilidad de la curva de Peano	47
Bibliografía	50

Capítulo 1

Preliminares

En el presente capítulo se dan las bases para el desarrollo de la tesis. Se espera que el lector posea conocimientos básicos de Topología dado que, aunque en este capítulo se darán resultados esenciales para sentar las bases de este documento, no se dan pruebas de algunas afirmaciones ya que no es el propósito, pero se da una referencia donde se pueden consultar. Sin más que decir, aquí vamos...

1.1. Continuos

Definición 1.1.1. *Dado un conjunto X no vacío, sea $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que para cualesquiera $x, y, w \in X$ cumple:*

- i) $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0$ si, y sólo si $x = y$;*
- ii) $d(x, y) = d(y, x)$;*
- iii) $d(x, y) \leq d(x, w) + d(w, y)$.*

*A d se le conoce como **distancia** o **métrica** sobre X y a la pareja (X, d) se le llama **espacio métrico**.*

Definición 1.1.2. *Un **continuo** es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.*

Definición 1.1.3. *Sean X un continuo y A un subconjunto de X . Se dice que A es un **subcontinuo** de X , si como subespacio, A es un continuo.*

Ejemplos de continuos

1. Dados a y $b \in \mathbb{R}$ el intervalo $[a, b]$ es un continuo cuya topología es la inducida por la métrica usual sobre \mathbb{R} .
2. La circunferencia unitaria, $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, con la topología inducida por la métrica usual sobre \mathbb{R}^2 .
3. La n -esfera, $S^n = \{\hat{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : \|\hat{x}\| = 1\}$ con la topología inducida por la métrica usual sobre \mathbb{R}^{n+1} .
4. Una n -celda denotada por I^n , es el producto cartesiano de I consigo mismo n veces, con la topología producto.
5. El producto cartesiano de S^1 consigo mismo n veces, con la topología producto.
6. La Banda de Möbius, véase la Figura 1.1, con la topología inducida por la métrica usual sobre \mathbb{R}^3 .

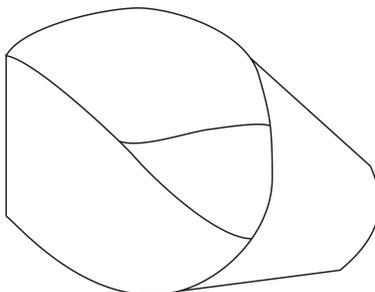


Figura 1.1: Banda de Möbius.

7. La curva del topólogo, véase la Figura 1.2, definida como sigue:

$$X = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin\left(\frac{1}{x}\right), x \in (0, 1] \right\} \cup (\{0\} \times [-1, 1])$$

con la topología inducida por la métrica usual sobre \mathbb{R}^2 .

8. El Triodo simple que se define de la siguiente manera: I_1, I_2, I_3 son arcos en el plano que coinciden exactamente en un punto extremo p y que por pares, los conjuntos $I_1 \setminus \{p\}, I_2 \setminus \{p\}, I_3 \setminus \{p\}$ son disjuntos. A

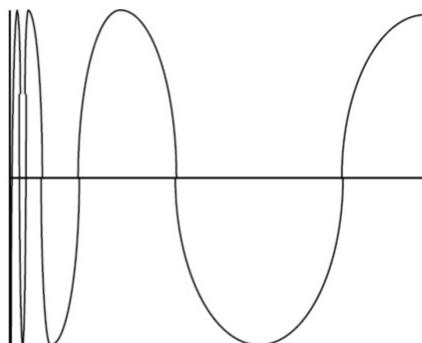


Figura 1.2: La curva del topólogo.

la unión de estos tres arcos, que denotaremos por T se le llama Triodo simple, y su topología es la inducida por la métrica usual sobre \mathbb{R}^2 , véase la Figura 1.3.

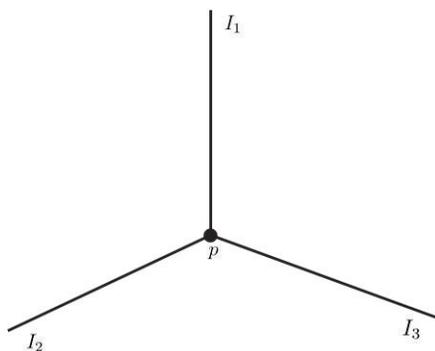


Figura 1.3: Triodo simple.

9. Un n -odo simple, es la unión de n -arcos en el plano que coinciden exactamente en un punto, véase la Figura 1.4, con la topología inducida por la métrica usual sobre \mathbb{R}^2 .
10. La Paleta es la unión en el plano de un circunferencia con un arco que solo la toca en un punto, con la topología inducida por la métrica usual sobre \mathbb{R}^2 , véase la Figura 1.5.

$$P = \{\hat{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\hat{x}\| = 1\} \cup ([1, 2] \times \{0\}).$$

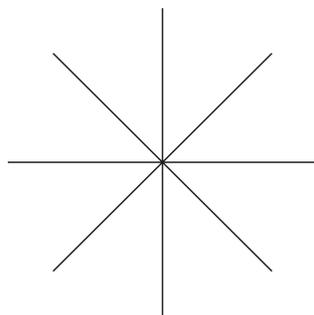
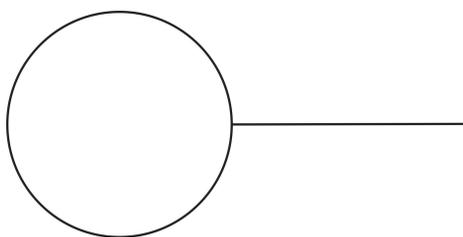
Figura 1.4: n -odo simple.

Figura 1.5: Paleta.

11. El cubo de Hilbert definido mediante:

$$Q = \prod_{n \in \mathbb{N}} I_n; \text{ donde } I_n = [0, 1] \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Con la topología producto.

1.2. Conexidad local

Definición 1.2.1. *Un espacio topológico X se dice que es **localmente conexo** en $p \in X$ si para cada abierto U de X que contiene a p , existe un abierto conexo V de X tal que $p \in V \subset U$.*

*Se dice que X es **localmente conexo** si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.*

Ejemplos

1. Cada intervalo y cada rayo de la recta real son localmente conexos.

2. \mathbb{R}^n es localmente conexo.
3. La curva del topólogo no es localmente conexa ya que para cualquier punto del segmento $\{0\} \times [-1, 1]$ y cualquier abierto pequeño, digamos de diámetro menor que 1 que contenga a dicho punto, este siempre tiene más de una componente, por lo que no será posible encontrar un abierto conexo tal que cumpla las condiciones de la Definición 1.2.1.
4. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos $x_n = (1, \frac{1}{n})$. Sea $X = \{(1, 0)\} \cup \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $p = (0, 0)$. A la unión de los segmentos de recta que van del punto p a cada uno de los elementos de X se le conoce como abanico armónico, el cual no es localmente conexo. Véase la Figura 1.6.

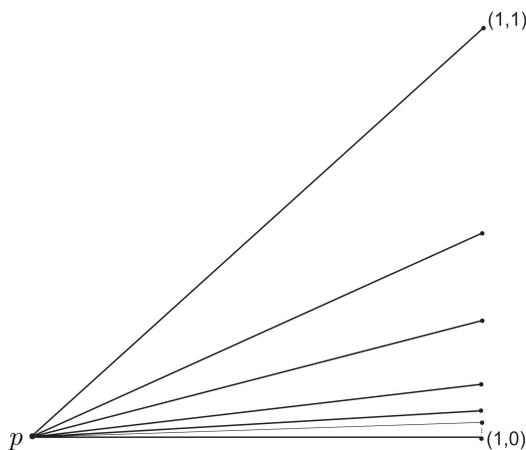


Figura 1.6: Abanico armónico.

5. El espacio Peine, que denotaremos por W , el cual se construye de la siguiente manera: Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $I_n = \{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]$, $I_0 = \{0\} \times [0, 1]$ y sea B el segmento que une los puntos $(0, 0)$ y $(1, 0)$, luego

$$W = B \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} I_n \right).$$

Este espacio tampoco es localmente conexo. Véase Figura 1.7.

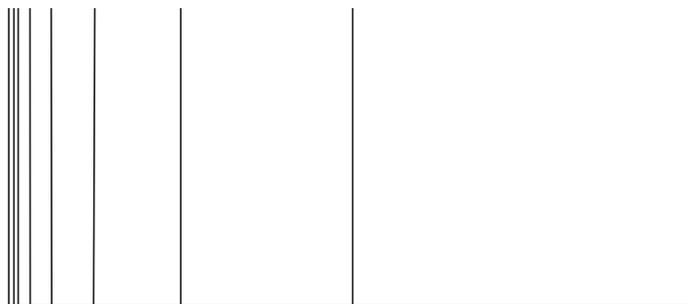


Figura 1.7: Espacio Peine.

Teorema 1.2.2. *Un espacio topológico X es localmente conexo si y sólo si para cada abierto U en X , cada componente de U es abierta en X .*

Demostración:

Sea U un abierto en X . Y sea C una componente de U , veamos que C es abierto en X . Sea $p \in C$, como X es localmente conexo, existe V un abierto conexo tal que $p \in V \subset U$. Dado que V es conexo y C es una componente de U , entonces $V \subset C$. Por lo tanto C es abierto en X .

Sean $p \in X$ y U un abierto tal que $p \in U$. Consideremos C_p la componente de U que contiene a p , entonces $p \in C_p \subset U$. Como C_p es un abierto conexo que contiene a p y está contenido en U , entonces X es localmente conexo en p . †

1.3. Conexidad en pequeño

Definición 1.3.1. *Sea X un espacio topológico y $p \in X$. Se dice que X es **conexo en pequeño en p** , lo cual denotaremos por **cik**, si para cada abierto U de X que contiene a p existe una vecindad conexa de p contenida en U .*

Observación 1.3.2. *Por definición, localmente conexo en p implica conexo en pequeño en p .*

El Ejemplo 1.3.3 muestra que el recíproco de la Observación 1.3.2 no se cumple, es decir, conexo en pequeño no implica localmente conexo.

Ejemplo 1.3.3. *Sea X una sucesión de abanicos armónicos, convergentes al punto p , como se muestra en la Figura 1.8. X es conexo en pequeño en el punto p pero no es localmente conexo en el punto p .*

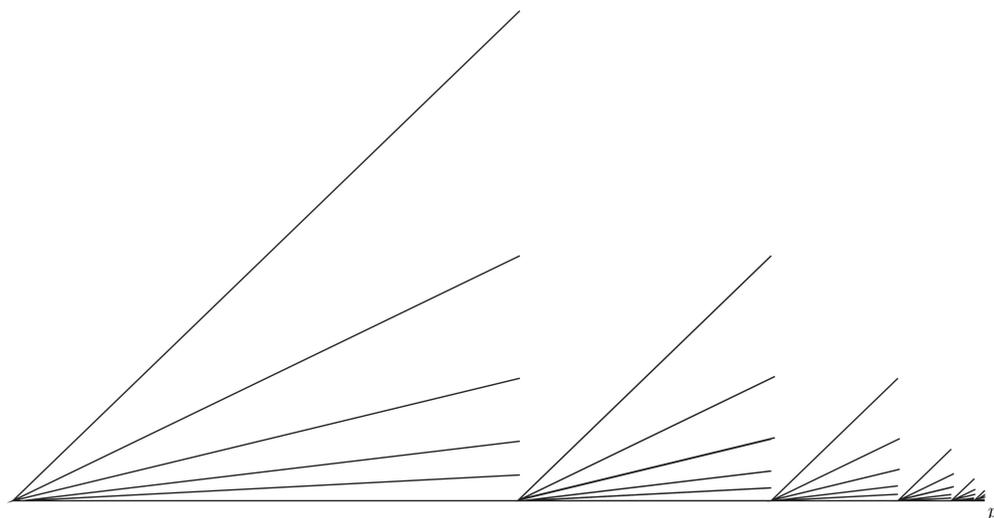


Figura 1.8: Sucesión de abanicos armónicos.

1.4. Dendritas

Definición 1.4.1. Un *arco* es un espacio topológico que es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$.

Definición 1.4.2. Cualquier espacio homeomorfo a la circunferencia es una *curva cerrada simple*.

Definición 1.4.3. Una *dendrita* es un continuo localmente conexo sin curvas cerradas simples.

A continuación haremos la construcción de una dendrita, para lo que primero daremos algunas definiciones.

Definimos el *orden de un punto* como un elemento del conjunto $\mathbb{N} \cup \{\omega, \aleph_0, \mathfrak{c}\}$, donde $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$, $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$ y ω es un símbolo formal, que entendemos por conveniencia, y cumple que $n < \omega < \aleph_0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Dado un espacio topológico (X, τ) y $p \in X$ decimos que para un cardinal $\mathfrak{c} \in \mathbb{N} \cup \{\aleph_0, \mathfrak{c}\}$,

- i) p es de orden menor o igual que \mathfrak{n} en X , si dado $U \in \tau$ existe $V \in \tau$ con $P \in V \subset U$ y $|\overline{V} \cap \overline{X - V}| \leq \mathfrak{n}$ y lo denotamos por $ord_X(p) \leq \mathfrak{n}$,
- ii) p es de orden igual que \mathfrak{n} en X , si $ord_X(p) \leq \mathfrak{n}$ y dado cualquier $\mathfrak{m} \lesssim \mathfrak{n}$, $ord_X(p) \not\leq \mathfrak{m}$,

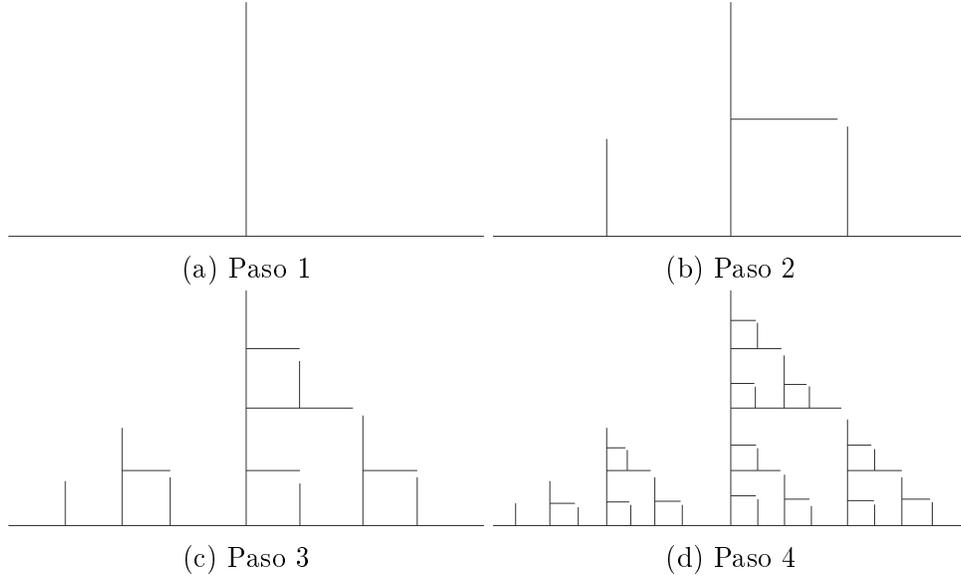


Figura 1.9: Cuatro primeros pasos de la construcción de D_3 .

- iii) p es de orden igual que ω en X , si dado $U \in \tau$ existe $V \in \tau$ con $P \in V \subset U$ y $|\overline{V} \cap \overline{X} - \overline{V}|$ es finita, pero $\text{ord}_X(p) \notin \mathbb{N}$.

A los puntos de orden 1 se les llama *puntos terminales*, a los de orden 2, *puntos ordinarios* y a los de orden mayor se les llama *puntos de ramificación*. Denotamos por D_n a la dendrita que es universal para la clase de dendritas con puntos de ramificación de orden a lo más n .

$R(D_n)$ indica el conjunto de los puntos de ramificación de la dendrita D_n .

D_n tiene la propiedad de que todos sus puntos de ramificación tiene orden n y además para cualquier arco $\alpha \subset D_n$ se tiene que $\overline{\alpha \cap R(D_n)} = \alpha$, es decir, la cerradura de la intersección del arco α con los puntos de ramificación de la dendrita, es solamente el arco α .

Dado un punto $c \in \mathbb{C}$ (\mathbb{C} representa a los números complejos) y l un segmento convexo en \mathbb{C} , con $c \in l$, llamaremos una *n -estrella centrada en c , sobre l , de tamaño $N > 0$* a un conjunto de la forma $\bigcup_{j=1}^n B_j$ donde cada B_j es un arco convexo con uno de sus extremos c , que forma un ángulo de $\pi/2j$ con el segmento l , tal que $\text{diám}(B_{j+1})/\text{diám}(B_j) = 1/(j+1)$ y $\text{diám}(\bigcup_{j=1}^n B_j) < N$.

Construcción de D_n :

Sea $n \in \mathbb{N} \cup \omega - \{0, 1, 2\}$. La construcción se hará por inducción, definimos,

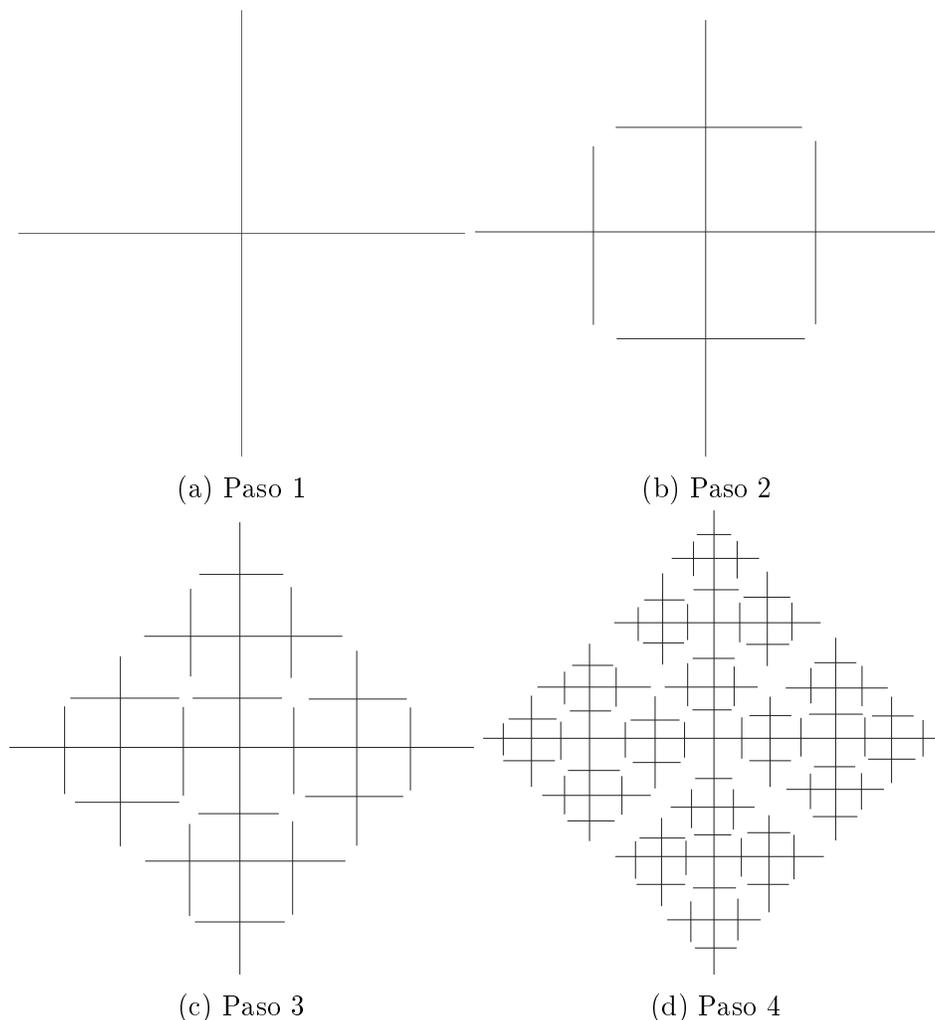


Figura 1.10: Cuatro primeros pasos de la construcción de D_4 .

en cada paso, una dendrita $D_n^k \subset \mathbb{C}$ para $k \in \mathbb{N}$. Tomemos D_n^0 como una n -estrella con centro en $0 \in \mathbb{C}$ sobre el eje real, con tamaño 1.

Supongamos ahora que para alguna $k \in \mathbb{N}$ ya tenemos construida $D_n^k \subset \mathbb{C}$ tal que todos sus puntos de ramificación son de orden n , y que podemos escribirla como $D_n^k = \bigcup_{j \in J_k} R_{k,n}^j$ ($J_k \subset \mathbb{N}$, que es finito si $n \neq \omega$) donde cada $R_{k,n}^j$ es un arco convexo tal que únicamente sus extremos tienen orden distinto de 2 en D_n^k y con la propiedad de que cada conjunto de la forma $R_{k,n}^j - R(D_n^k)$ es abierto en D_n^k . Todo este enunciado será nuestra hipótesis

de inducción.

Sea $p_{k,n}^j$ el punto medio del arco $R_{k,n}^j$, el conjunto de todos estos puntos lo denotamos por $P_{k,n} = \{p_{k,n}^j : j \in J_k\}$. Notemos que, por la condición de separación que pedimos como hipótesis, para todo $j \in J_k$ tenemos que $p_{k,n}^j \notin \overline{P_{k,n} - p_{k,n}^j}$, es decir, que $P_{k,n}$ no tiene puntos de acumulación en él mismo. Entonces, para cada $j \in J_k$, construyamos una $(n-2)$ -estrella (si $n = \omega$ tomamos ω -estrella), que llamaremos $N_{k,n}^j$, con centro en $p_{k,n}^j$, sobre $R_{k,n}^j$ con tamaño

$$\text{mín} = \left\{ \frac{1}{2^{j+k}}, \frac{1-a_k}{2} d(p_{k,n}^j, P_{k,n} - \{p_{k,n}^j\}), \frac{1}{2} d(p_{k,n}^j, \bigcup_{l \in J_k - \{j\}} R_{k,n}^l) \right\}$$

donde

$$a_k = e^{-2^{-k}} < 1$$

Si suponemos que existe un punto $x \in N_{k,n}^j \cap N_{k,n}^i$, para algunas $i, j \in J_k$, con $i \neq j$, tendríamos, por la desigualdad del triángulo y el hecho que $\frac{1-a_k}{2} < \frac{1}{2}$, que

$$\begin{aligned} d(p_{k,n}^j, p_{k,n}^i) &< d(x, p_{k,n}^j) + d(x, p_{k,n}^i) \\ &< \frac{1}{2} \left(d(p_{k,n}^j, P_{k,n} - \{p_{k,n}^j\}) + d(p_{k,n}^i, P_{k,n} - \{p_{k,n}^i\}) \right) \\ &< \text{máx} \left\{ d(p_{k,n}^j, P_{k,n} - \{p_{k,n}^j\}), d(p_{k,n}^i, P_{k,n} - \{p_{k,n}^i\}) \right\} \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción, por lo que las $(n-2)$ -estrellas definidas son disjuntas dos a dos. Con esto, como cada $(n-2)$ -estrella que definimos solamente toca a D_n^k en un punto, podemos definir la dendrita $D_n^{k+1} = D_n^k \cup \left(\bigcup_{j \in J_k} N_{k,n}^j \right)$. Ahora hay que ver que cumple la hipótesis inductiva para $k+1$.

Observese que $D_n^{k+1} \subset \mathbb{C}$. Es claro que todos sus puntos de ramificación que aumentaron son los $p_{k,n}^j$ que tienen orden 2 en D_n^k y ahora con las $(n-2)$ -estrellas que pusimos sobre ellos, tienen orden n en D_n^{k+1} . Los segmentos convexos $R_{k+1,n}^j$ serán de dos tipos, los primeros serán las dos mitades de los segmentos $R_{k,n}^j$ que fueron "divididos" en dos partes cuando pusimos las $(n-2)$ -estrellas en el paso inductivo; los segundos son los segmentos convexos de la definición de cada uno de las $(n-2)$ -estrellas que pusimos. Claramente

cada uno de estos segmentos nos da un conjunto abierto cuando le quitamos los puntos de $R(D_n^k)$. Entonces se cumplen las condiciones de la hipótesis para $k + 1$, lo que nos dice que podemos hacer la construcción.

La representación gráfica de lo anterior para los cuatro primeros pasos de la construcción de D_3 y D_4 se observan en la Figura 1.9 y la Figura 1.10, respectivamente.

1.5. Algunos teoremas y definiciones importantes

Definición 1.5.1. *Un espacio topológico X se dice T_2 o de **Hausdorff** si para cualesquiera $x, y \in X$ existen U, V abiertos en X tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

*Decimos que X es un **continuo de Hausdorff** si X es un continuo y T_2 .*

Definición 1.5.2. *Para un espacio topológico Y , sean*

$$(1) 2^Y = \{A : A \text{ es un subconjunto cerrado no vacío de } Y\}.$$

$$(2) C(Y) = \{A \in 2^Y : A \text{ es conexo}\}.$$

Definición 1.5.3. *Sean (X, τ_1) y (Y, τ_2) espacios topológicos, una función $F : X \rightarrow 2^Y$ es llamada **semicontinua superiormente en un punto $p \in X$ (USC en p)** si para cada $U \in \tau_2$ tal que $F(p) \subset U$, existe $V \in \tau_1$ tal que $p \in V$ y $F(x) \subset U$ para todo $x \in V$.*

*Una función $F : X \rightarrow 2^Y$ se dice **USC** si cumple que es USC para cada punto de X .*

Teorema 1.5.4. *[7, Teorema 7.4] Sean X y Y espacios métricos compactos y no vacíos, y supongamos que (1)-(4) se cumplen,*

$$(1) F_n : X \rightarrow 2^Y \text{ es USC para cada } n = 1, 2, \dots;$$

$$(2) F_n(x) \supset F_{n+1}(x) \text{ para cada } x \in X \text{ y cada } n = 1, 2, \dots;$$

$$(3) Y = \bigcup_{x \in X} F_n(x) \text{ para todo } n = 1, 2, \dots;$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \text{diám}[F_n(x)] = 0 \text{ para cada } x \in X.$$

Entonces hay una función continua f de X sobre Y , tal que f puede ser definida como: $f(x) =$ el único punto en $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(x)$, para cada $x \in X$.

Lema 1.5.5. [7, Lema 3.2] Si un espacio de Hausdorff es una imagen continua de un espacio métrico compacto, entonces es metrizable.

Teorema 1.5.6. [6, Teorema 35.1](Teorema de extensión de Tietze) Sea X un espacio normal y A un subespacio cerrado de X .

- a) Cualquier función continua de A en el intervalo cerrado $[a, b]$ de \mathbb{R} se puede extender a una función continua de X en $[a, b]$.
- b) Cualquier función continua de A en \mathbb{R} se puede extender a una función continua de todo X en \mathbb{R} .

Definición 1.5.7. Sean X y Y dos espacios topológicos, decimos que X se mapea sobre Y si existe $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva.

Teorema 1.5.8. [8, Teorema 6.4](Netto) Si f representa una función biyectiva de una variedad diferenciable m -dimensional sobre una variedad diferenciable n -dimensional y $m \neq n$, entonces f es necesariamente discontinua.

Definición 1.5.9. Si f es una función de un subconjunto de \mathbb{R}^m en \mathbb{R}^n y $A \subseteq \mathbb{R}^m$, entonces

$$f_*(A) = \{f(x) \in R(f) \mid x \in A \cap D(f)\}$$

es llamada la **imagen directa de A bajo f** . Donde $R(f)$ y $D(f)$ denotan el rango y dominio de f , respectivamente.

Añadiremos la siguiente definición de curva, la cual es la que se considera conveniente para los propósitos requeridos en el Capítulo 3.

Definición 1.5.10. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua, entonces la imagen $f_*(I)$ es llamada una **curva**. $f(0)$ denota el punto inicial de la curva y $f(1)$ el punto final.

Llamaremos a

$$x = f(t), \quad t \in I$$

una representación paramétrica de la curva $\mathcal{C} = f_*(I)$.

En funciones coordenadas, para \mathbb{R}^2 tenemos que $f(t) = (\xi, \eta)$ donde

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi(t) \\ \eta &= \psi(t). \end{aligned}$$

A continuación estableceremos una notación que utilizaremos para la Definición 1.5.12.

Sea $n \in \mathbb{N}$, denotamos por \mathbb{R}^n el espacio euclideo n -dimensional. Sus puntos se designaran por $x = (x_1, \dots, x_n)$, donde $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, son las coordenadas del punto x en cierto sistema de coordenadas fijo, dicho sistema se considera para el resto del trabajo. Fijemos un número entero no negativo k . Sea $1 \leq i \leq n$, el i -ésimo eje coordenado es el conjunto $x_i = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = 0 \text{ para } j \neq i\}$. Para $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ consideremos los puntos $x^i \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_j = 0$ con $i \neq j$ y $x_i = 10^{-k}m$ y tracemos por estos puntos hiperplanos ortogonales al i -ésimo eje. El conjunto de todos los hiperplanos construidos previamente para todos los ejes coordenados engendra una familia de los cubos cerrados n -dimensionales del tipo

$$Q^n = \left\{ x : \frac{m_i}{10^k} \leq x_i \leq \frac{m_i + 1}{10^k}, i = 1, 2, \dots, n \right\}, \quad (1.1)$$

donde $m_i, i = 1, 2, \dots, n$, recorren independientemente uno del otro el conjunto de todos los números reales.

Los cubos (1.1) se llaman *cubos de rango k* , la totalidad de ellos se designa con $T_k, k = 0, 1, \dots$

Observemos que

- (i) El conjunto de todos los cubos de rango k cubre todo el espacio, es decir

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{Q^n \in T_k} Q^n.$$

- (ii) Dos cubos de un mismo rango pueden tener en común sólo algunos puntos de su frontera.
- (iii) Si $n = 1$, entonces Q^1 es un segmento.
- (iv) Si $n = 2$, entonces Q^2 es un cuadrado.

El número $1/10^{kn}$ lleva el nombre de **volumen n -dimensional** del cubo Q^n y se denota con μQ^n .

Para un conjunto S , que representa la unión de un número finito o numerable de diferentes cubos Q_j^n de rango $k, j = 1, 2, \dots$

$$S = \bigcup_j Q_j^n, Q_j^n \in T_k,$$

su volumen n -dimensional μS se determina por la igualdad

$$\mu S = \sum_j \mu Q_j^n. \quad (1.2)$$

Notemos que μS es un número no negativo.

Sea X un conjunto arbitrario en \mathbb{R}^n . Designemos mediante $s_k = s_k(X)$ el conjunto de puntos de todos los cubos n -dimensionales de rango k íntegramente contenidos en X , y mediante $S_k = S_k(X)$, el conjunto de puntos de todos los cubos n -dimensionales de rango k , cada uno de los cuales se intersecta con el conjunto X por un conjunto no vacío ($k = 0, 1, \dots$)

$$s_k(X) = \bigcup_{Q^n \subset X} Q^n, \quad S_k(X) = \bigcup_{Q^n \cap X \neq \emptyset} Q^n, \quad Q_j^n \in T_k.$$

De este modo, todos los demás cubos de rango k , contenidos en s_k , se disponen en el conjunto X , mientras que los cubos de rango k , contenidos en S_k , forman un recubrimiento del conjunto X , es decir, $s_k(X) \subset X \subset S_k(X)$. Notemos que el conjunto X se dispone “estrictamente dentro” del poliedro $S_k = S_k(X)$, es decir, no se intersecta con su frontera ∂S_k . Efectivamente, el punto $x \in X \cap \partial S_k$ no puede existir, puesto que si fuera punto frontera para S_k , pertenecería a la cara de cierto cubo de rango k . Ya que los cubos en consideración son cerrados, entonces por definición del poliedro S_k , le pertenecerían a él todos los cubos de rango k que contienen dicha cara, pues ésta última contiene el punto $x \in X$. De este modo, el punto citado no sería punto frontera para S_k .

Es evidente que

$$\begin{aligned} s_0 &\subset s_1 \subset \dots \subset s_k \subset s_{k+1} \subset \dots, \\ S_0 &\supset S_1 \supset \dots \supset S_k \supset S_{k+1} \supset \dots, \end{aligned}$$

y, por consiguiente, en virtud de la definición (1.2)

$$\begin{aligned} \mu s_0 &\leq \mu s_1 \leq \dots \leq \mu s_k \leq \mu s_{k+1} \leq \dots, \\ \mu S_0 &\geq \mu S_1 \geq \dots \geq \mu S_k \geq \mu S_{k+1} \geq \dots, \end{aligned}$$

De esta forma, se han obtenido dos sucesiones monótonas cuyos términos son los elementos del conjunto ampliado de los números reales $\overline{\mathbb{R}}$, a saber, o bien los números reales no negativos. Por eso para cualquier conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ siempre existen los límites finitos o infinitos.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mu s_k \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \mu S_k$$

Definición 1.5.11. El límite finito o infinito $\lim_{x \rightarrow \infty} \mu S_k$ lleva el nombre de **medida de Jordan n -dimensional inferior o interior del conjunto X** y se designa mediante $\mu_* X$. Mientras que el límite $\lim_{x \rightarrow \infty} \mu S_k$ se denomina **medida de Jordan n -dimensional superior o exterior del conjunto X** y se designa mediante $\mu^* X$.

Si las medidas inferior $\mu_* X$ y superior $\mu^* X$ del conjunto X son finitas y coinciden, el conjunto se llama **medible según Jordan**. El valor general de las medidas de Jordan inferior y superior del conjunto medible X se designa por μX y se llama **medida de Jordan n -dimensional o volumen n -dimensional del conjunto X** :

$$\mu X = \mu_* X = \mu^* X.$$

Para un conjunto vacío debe ser, por definición $\mu \emptyset = 0$.

Denotaremos por J_n a la medida de Jordan n -dimensional.

Definición 1.5.12. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ es continua y $J_n(f_*(I)) > 0$, entonces $f_*(I)$ es llamada una **curva que llena el espacio**.

Capítulo 2

Espacios de Peano y el Teorema de Hahn-Mazurkiewicz

Ahora que ya hemos visto los preliminares estamos listos para incursionar en este capítulo. A continuación veremos que son los espacios de Peano, la propiedad S y algunos teoremas y lemas que nos van a permitir probar el teorema más importante de este trabajo, el Teorema de Hahn-Mazurkiewicz.

2.1. Espacios de Peano

Definición 2.1.1. *Un espacio métrico (X, d) es llamado un **espacio de Peano** si es localmente conexo.*

Definición 2.1.2. *Un **continuo de Peano** es un espacio de Peano que es un continuo.*

Teorema 2.1.3. *Un espacio métrico (X, d) es un espacio de Peano si y sólo si se cumple alguno de los siguientes incisos:*

- (1) *X es localmente conexo en cada punto;*
- (2) *Cada componente de cada subconjunto abierto de X es abierto en X , o*
- (3) *X es conexo en pequeño (cik) en cada punto.*

Demostración:

- (1) Por la definición de Espacio de Peano.

(2) Por el Teorema 1.2.2.

(3) La suficiencia se satisface por la Observación 1.3.2.

Para la necesidad, sean U un subconjunto abierto de X , C una componente de U y $x \in C$. Como X es cik en x , existe una vecindad V conexa de X tal que $x \in V \subseteq U$. Dado que V es conexo, tenemos que $V \subseteq C$. Así, $x \in V \subseteq C$. Por ser V una vecindad de x , existe un abierto W tal que $x \in W \subseteq V \subseteq C$. Por lo que C es un abierto.

†

2.2. Propiedad S

Definición 2.2.1. Sean X un espacio métrico y Y un subconjunto no vacío de X , se dice que Y tiene la **propiedad S** si para cada $\varepsilon > 0$, hay una cantidad finita de subconjuntos conexos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ de Y tales que

$$Y = \bigcup_{i=1}^n A_i, \quad \text{diám}(A_i) < \varepsilon/2 \text{ para cada } i = 1, \dots, n.$$

Proposición 2.2.2. La recta real con la métrica usual no tiene la propiedad S.

Demostración:

Supongamos que \mathbb{R} tiene la propiedad S, entonces

$$\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^n A_i \quad \text{diám}(A_i) < \varepsilon/2 \text{ para cada } i = 1, \dots, n.$$

Notemos que A_i es un intervalo, por lo que

$$\text{diám}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq n \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces la recta real está acotada, lo cual es una contradicción.

†

Teorema 2.2.3. Si un espacio métrico (X, d) tiene la propiedad S, entonces X es un espacio de Peano.

Demostración:

Por el Teorema 2.1.3, basta probar que X es *cik* en cada punto.

Sean $p \in X$ y $\varepsilon > 0$. Dado que X tiene la propiedad S, hay un número finito de subconjuntos conexos A_1, \dots, A_n de X tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^n A_i, \quad \text{y} \quad \text{diám}(A_i) < \varepsilon/2 \text{ para cada } i = 1, \dots, n.$$

Sea $R = \{A_i : p \in \overline{A_i}\}$ y definimos $G = \bigcup R$.

Como $p \in X$ y $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$, existe $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $p \in A_{i_0}$. Así, $A_j \subset A_j \cup \{p\} \subset \overline{A_j}$ para cada $A_j \in R$. Como A_i es conexo para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ se tiene que $A_j \cup \{p\}$ es conexo. Por lo que G es la unión de conexos que tienen un punto en común. Así G es conexo.

Probaremos ahora que G es una vecindad conexa de p . En efecto, sea $\delta > 0$ tal que $\delta < \varepsilon/2$. Como $B_\delta(p)$ es conexo y $\text{diám}(A_{i_0}) < \varepsilon/2$, entonces $B_\delta(p) \subset A_{i_0} \subset G$. Luego G es una vecindad conexa de p . Por lo tanto, se tiene probado que X es *cik*. Esto completa la prueba del teorema. †

Teorema 2.2.4. *Un espacio métrico compacto y no vacío X es un espacio de Peano si y sólo si tiene la propiedad S.*

Demostración:

Sea $\epsilon > 0$, como X es un espacio de Peano, X es localmente conexo. Por lo que para cada $x \in X$ existe un abierto conexo B_x cuyo diámetro es menor que $\epsilon/2$. Consideremos

$$C = \{B_x : x \in X\}$$

la cual es una cubierta abierta para X . Como X es compacto, existen $B_{x_1}, B_{x_2}, \dots, B_{x_n}$ una cantidad finita de elementos de C tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^n B_{x_i}.$$

Así, X cumple la condiciones que se requieren para tener la propiedad S.

La suficiencia se cumple por el Teorema 2.2.3. †

Corolario 2.2.5. *Un continuo X es un continuo de Peano si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$, X es la unión de un número finito de subcontinuos de diámetro menor que ε .*

Demostración:

Como X es un continuo de Peano por el Teorema 2.2.4, X tiene la propiedad S. Entonces para cada $\epsilon > 0$ hay una cantidad finita de subconjuntos conexos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ de X tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^n A_i, \quad \text{diám}(A_i) < \epsilon/2 \text{ para cada } i = 1, \dots, n.$$

Sea $B_i = \overline{A_i}$, notemos que cada B_i es métrico, conexo y además compacto. Por lo que, cada B_i es un subcontinuo de X . Así,

$$X = \bigcup_{i=1}^n B_i, \quad \text{diám}(B_i) < \epsilon/2 < \epsilon \text{ para cada } i = 1, \dots, n.$$

†

Proposición 2.2.6. Sean X un espacio métrico y $Y \subset X$ tales que Y tiene la propiedad S. Entonces, para cualquier Z tal que $Y \subset Z \subset \overline{Y}$, Z tiene la propiedad S y por lo tanto es un espacio de Peano.

Demostración:

Sean $\epsilon > 0$ y A_1, A_2, \dots, A_n subconjuntos conexos que satisfacen

$$Y = \bigcup_{i=1}^n A_i, \quad \text{con } \text{diám}(A_i) < \epsilon \text{ para cada } i = 1, \dots, n.$$

Consideremos B_i la cerradura de A_i en Z , es decir, $B_i = \overline{A_i} \cap Z$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Como cada A_i es conexo en Y , entonces B_i es conexo en \overline{Y} . Así, B_i es conexo en Z ya que $Z \subset \overline{Y}$, además $\text{diám}(B_i) < \epsilon/2$.

Para concluir la prueba de la proposición es necesario asegurar que la siguiente igualdad se satisface,

$$Z = \bigcup_{i=1}^n B_i.$$

Veamos que $Z \subset \bigcup_{i=1}^n B_i$. Sea $z \in Z$, como $Z \subset \overline{Y}$ entonces $z \in \overline{Y}$. Dado que $\overline{A_i} \subset \overline{Y}$ para cada i , existe $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $z \in \overline{A_j} \subset \overline{Y}$, esto pues

$$\overline{Y} = \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}.$$

Por otro lado, sea $x \in \bigcup_{i=1}^n B_i$. Entonces $x \in B_i$ para alguna i . Por lo que $x \in \overline{A_i} \cap Z$. Así, $x \in Z$. †

Definición 2.2.7. Sean (X, d) un espacio métrico y $\epsilon > 0$. Una $s(\epsilon)$ -cadena es una colección indizada, finita y no vacía $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_n\}$ de subconjuntos de X que satisfacen las siguientes condiciones:

- (1) $L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset$ para cada $i = 1, 2, \dots, n-1$;
- (2) L_i es conexo para cada $i = 1, 2, \dots, n$;
- (3) $\text{diám}(L_i) < \epsilon/2^i$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

Si $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ es una $s(\epsilon)$ -cadena, entonces cada $L_i \in \mathcal{L}$ es llamado un **eslabón** de \mathcal{L} .

Si $x \in L_1$ y $y \in L_n$ entonces decimos que \mathcal{L} es una $s(\epsilon)$ -cadena de x a y .

Si $A \subset X$, entonces definimos $S(A, \epsilon)$ como sigue:

$$S(A, \epsilon) = \{y \in X : \text{hay una } s(\epsilon)\text{-cadena de algún punto de } A \text{ a } y\}.$$

Proposición 2.2.8. Si un espacio métrico (X, d) tiene la propiedad S, entonces para cualquier subconjunto no vacío A de X y cualquier $\epsilon > 0$, $S(A, \epsilon)$ tiene la propiedad S.

Demostración:

Sea $\delta > 0$, probaremos que $S(A, \epsilon) = \bigcup_{i=1}^n B_i$, para alguna $n \in \mathbb{N}$, donde cada B_i es conexo y tiene diámetro menor que δ . Como la serie $\sum_{i=k}^n 2^{-i}$ es convergente, podemos elegir un entero positivo k tal que

$$(1) \quad \sum_{i=k}^n \epsilon \cdot 2^{-i} < \delta/4.$$

Sea

$K = \{y \in S(A, \epsilon) : \text{hay una } s(\epsilon)\text{-cadena con a lo más } k \text{ eslabones de algún punto de } A \text{ a } y\}$.

Dado que (X, d) tiene la propiedad S, hay una cubierta finita de X por conjuntos conexos tales que su diámetro es menor que $\epsilon \cdot 2^{-k-1}$. Sean E_1, E_2, \dots, E_n los elementos de esta cubierta que intersectan a K (si ninguno de estos intersecta a K , entonces $K = \emptyset$ y como $A \subset K$, $A = \emptyset$ lo cual es una contradicción). Notemos que (2)-(5) se satisfacen

$$(2) \quad K \subset \bigcup_{i=1}^n E_i;$$

- (3) $E_i \cap K \neq \emptyset$ para cada i ;
- (4) E_i es conexo para cada i ;
- (5) $\text{diám}(E_i) < \epsilon \cdot 2^{-k-1}$ para cada i .

Veamos que se cumple

- (6) $E_i \subset S(A, \epsilon)$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

Sea $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ fija. Por (3), hay una $s(\epsilon)$ -cadena $\{L_1, L_2, \dots, L_t\}$ con $t \leq k$ de un punto de A a un punto de $E_i \cap K$. Entonces, por (4), (5) y la Definición 2.2.7 se tiene que $\{L_1, \dots, L_t, L_{t+1} = E_i\}$ es una $s(\epsilon)$ -cadena de un punto de A a cualquier punto de E_i . Con lo que se tiene probado (6).

Para cada i , $1 \leq i \leq n$, P_i denota la colección de subconjuntos M que satisfacen (7)-(10):

- (7) $M \subset S(A, \epsilon)$;
- (8) $M \cap E_i \neq \emptyset$;
- (9) M es conexo;
- (10) $\text{diám}(M) < \delta/4$.

Sea $B_i = \bigcup P_i$ para cada $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Observemos que cualquier E_i satisface (7), (8), (9) y (10). Por lo tanto,

- (11) $E_i \subset B_i$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

A continuación probaremos que B_1, B_2, \dots, B_n cumplen las propiedades deseadas.

- B_i es conexa.

Para cada $M \in P_i$ definimos $N_M = M \cup E_i$. Así, por (8) y (9) N_M conexo. Por lo que $B_i = \bigcup N_M$ es conexo.

- $\text{diám}(B_i) < \delta$.

Si $x, y \in B_i$ entonces, existen s y t tales que $x \in M_s$ y $y \in M_t$. Por (8) y (10) existe $z \in E_i \cap M_s$ tal que $d(x, z) < \delta/4$. Análogamente, existe $w \in E_i \cap M_t$ tal que $d(y, w) < \delta/4$. Además, por (10) y dado que $z, w \in E_i$ tenemos que $d(z, w) < \delta/4$. Por la desigualdad del triángulo tenemos que

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y) \\ &\leq d(x, w) + d(w, z) + d(z, w) + d(w, y) \\ &< 4 \frac{\delta}{4} = \delta. \end{aligned}$$

- $S(A, \epsilon) \subset \bigcup_{i=1}^n B_i$ para alguna $n \in \mathbb{N}$.

Notemos que por (7), $B_i \subset S(A, \epsilon)$. Veamos que

$$(*) \quad S(A, \epsilon) \subset \bigcup_{i=1}^n B_i.$$

Sea $y \in S(A, \epsilon)$, dado que $E_i \subset B_i$ entonces $\bigcup E_i \subset \bigcup B_i$. Y, como $K \subset \bigcup E_i$ tenemos que $K \subset \bigcup B_i$. Por lo que si $y \in K$ no hay nada que probar. Supongamos que $y \notin K$. Como $y \in S(A, \epsilon)$, hay una $s(\epsilon)$ -cadena $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_m\}$ de un punto de A a y , donde $m > k$. Sea

$$H = \bigcup_{i=k}^m L_i.$$

Por la definición de K , $L_k \subset K$ y por (2) tenemos que $L_k \cap E_i \neq \emptyset$ para algún i . Probaremos que $H \subset B_i$ para garantizar que H satisface (7)-(10). Por la definición de $S(A, \epsilon)$,

$$\bigcup \mathcal{L} \subset S(A, \epsilon).$$

Así, $H \subset S(A, \epsilon)$, es decir, H cumple (7). Como $L_k \cap E_i \neq \emptyset$ se tiene que H satisface (8). Además, H es conexo por (1) y (2) de la Definición 2.2.7. Finalmente $\text{diám}(H) \leq \sum_{i=k}^m \text{diám}(L_i) \leq \sum_{i=k}^m \epsilon/2^i$ por (3) de la Definición 2.2.7, de manera que $\text{diám}(H) < \delta/4$ por (1), así H cumple (10). Ahora que hemos probado que H satisface (7)-(10) tenemos que $H \subset B_i$, y como $y \in L_m$ entonces $y \in B_i$ y esto completa la prueba de (*), por lo tanto el conjunto de las B_i satisface la Definición 2.2.1. †

Lema 2.2.9. Sean (X, d) un espacio métrico, A un subconjunto de X no vacío y $\epsilon > 0$. Entonces (1)-(3) se satisfacen:

- (1) $\text{diám}[S(A, \epsilon)] \leq \text{diám}(A) + 2\epsilon$;
- (2) Si A es conexo, entonces $S(A, \epsilon)$ es conexo;
- (3) Si (X, d) tiene la propiedad S, entonces $S(A, \epsilon)$ es un subconjunto abierto de X .

Demostración:

- (1) Sea $S = \sum_{i=1}^n r^{-i} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \cdots + \frac{1}{r^n}$, entonces $rS = 1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \cdots + \frac{1}{r^{n-1}}$, luego $S - rS = S(1 - r) = \frac{1}{r^n} - 1 = \frac{1-r^n}{r^n}$ por lo que $S = \frac{1-r^n}{r^n(1-r)}$, de esta forma tenemos que:

$$S = \sum_{i=1}^n r^{-i} = \frac{r^n - 1}{r^n(r - 1)}.$$

Entonces

$$\sum_{i=1}^n 2^{-i} = \frac{2^n - 1}{2^n(2 - 1)} = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Ahora, sean $x, y \in S(A, \epsilon)$, por la desigualdad del triángulo se tiene que $d(x, y) \leq d(x, p) + d(p, y)$ donde $p \in A$, luego $d(p, y) = d(y, p) \leq d(y, q) + d(q, p)$ para cualquier $q \in A$, por lo que:

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, p) + d(y, q) + d(q, p) \\ &\leq \epsilon(1 - \frac{1}{2^n}) + \epsilon(1 - \frac{1}{2^n}) + \text{diám}(A) \\ &= 2\epsilon - 2(\frac{\epsilon}{2^n}) + \text{diám}(A) \\ &< \text{diám}(A) + 2\epsilon. \end{aligned}$$

- (2) Veamos primero que para cada $s(\epsilon)$ -cadena $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, \dots, L_n\}$, la unión de esta es conexa.

La demostración de esto se hará por inducción matemática sobre n

Para $n = 1$, L_1 es conexo por definición.

Para $n = 2$, como $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ y ambos son conexos, entonces $L_1 \cup L_2$ es conexa.

• Supongamos que para $n = k$, $\bigcup_{i=1}^k L_i$ es conexa.

• Mostraremos ahora que se cumple para $n = k + 1$.

Notemos que $\bigcup_{i=1}^{k+1} L_i = \bigcup_{i=1}^k L_i \cup L_{k+1}$. Por la hipótesis de inducción y el caso $n = 2$, $\bigcup_{i=1}^{k+1} L_i$ es conexa.

Por otro lado, como A es conexo, es claro que $S(A, \epsilon)$ es la unión de conjuntos conexos que tienen al conjunto A en común. Por lo tanto, $S(A, \epsilon)$ es conexa.

- (3) Si $y \in S(A, \epsilon)$ entonces hay una $s(\epsilon)$ -cadena, $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$, de algún punto de A a $y \in L_n$ y $\text{diám}(L_n) < \epsilon/2^n$. Como (X, d) tiene la propiedad S, por el Teorema 2.2.3, X es un espacio de Peano. Entonces

por (3) del Teorema 2.1.3, para la vecindad L_n hay un subconjunto U abierto y conexo tal que $y \in U \subset L_n$. Por lo que $\text{diám}(U) < \epsilon/2^{n+1}$. Así, $\{L_1, L_2, \dots, L_n, L_{n+1} = U\}$ es una $s(\epsilon)$ -cadena de un punto de A a cualquier punto de U . Con lo cual $U \subset S(A, \epsilon)$, por lo tanto $S(A, \epsilon)$ es abierto.

†

Teorema 2.2.10. *Si un espacio métrico (X, d) tiene la propiedad S , entonces para cualquier $\epsilon > 0$, X es la unión de una cantidad finita de subconjuntos conexos cada uno de los cuales tiene la propiedad S y es de diámetro menor que ϵ . Además, estos conjuntos pueden ser elegidos abiertos o cerrados en X .*

Demostración:

Como (X, d) tiene la propiedad S , $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$ con $n < \infty$, donde cada A_i es conexo y su diámetro menor que $\epsilon/3$. Por la Proposición 2.2.8, los conjuntos $S(A_i, \epsilon/3)$ tienen la propiedad S . Por lo que, X es la unión de una cantidad finita de subconjuntos conexos cada uno de los cuales tiene la propiedad S . Por (3) del Teorema 2.2.9, cada $S(A_i, \epsilon/3)$ es abierto. De la Proposición 2.2.6, cada $\overline{S(A_i, \epsilon/3)}$ también satisface la propiedad deseada. †

Teorema 2.2.11. *Si (X, d) es un continuo de Peano, entonces para algún $\epsilon > 0$, X es la unión de una cantidad finita de continuos de Peano cada uno de los cuales es de diámetro menor que ϵ .*

Demostración:

Como (X, d) es un continuo de Peano del Teorema 2.2.4, (X, d) tiene la propiedad S . Del Teorema 2.2.10, para cualquier $\epsilon > 0$, X es la unión de una cantidad finita de conjuntos conexos $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, cada uno de los cuales tiene la propiedad S , es de diámetro menor que ϵ y además es cerrado. Por lo que cada A_i es un continuo. Del Teorema 2.2.3, X es la unión de una cantidad finita de continuos de Peano cada uno de los cuales es de diámetro menor que ϵ . †

2.3. El Teorema de Hahn-Mazurkiewicz

Definición 2.3.1. *Una **cadena débil** es una colección indizada finita y no vacía $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ de conjuntos tales que*

$$L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset \quad \text{para cada } i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Dada $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ una cadena débil, decimos que \mathcal{L} es una cadena débil de L_1 a L_n . Si $x \in L_1$ y $z \in L_n$, entonces decimos que \mathcal{L} es una cadena débil de x a z . Cada $L_i \in \mathcal{L}$ es llamado un **eslabón** de \mathcal{L} .

Lema 2.3.2. Si $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ y $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ son cadenas débiles con $C_1 = L_1$, entonces hay una cadena débil \mathcal{P} de C_1 a L_n tal que $\mathcal{P} = \mathcal{C} \cup \mathcal{L}$.

Demostración:

Consideremos a \mathcal{P} de la siguiente manera: $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_{2m+n}\}$ donde $P_i = C_i$, $P_{m+i} = C_{m-i+1}$ para $1 \leq i \leq m$, y $P_{2m+i} = L_i$ para $1 \leq i \leq n$. Entonces, \mathcal{P} va de C_1 a L_n y $\mathcal{P} = \mathcal{C} \cup \mathcal{L}$. †

Lema 2.3.3. Sea S un espacio topológico conexo, y sean $p, q \in S$. Si $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ es una colección finita de subconjuntos cerrados y no vacíos de S tales que cubren a S , entonces la colección \mathcal{C} puede ser indizada para formar una cadena débil de p a q .

Demostración:

Dado que $S = \bigcup_{i=1}^n C_i$ existe C_i tal que $p \in C_i$ para alguna $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Sin perder generalidad, supongamos que $p \in C_1$. Consideremos $\mathcal{C}_0 = \{C \in \mathcal{C} : \text{hay una cadena débil de } C_1 \text{ a } C, \text{ cuyos eslabones son elementos de } \mathcal{C}\}$.

Afirmación $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$.

Consideremos los conjuntos $A = \bigcup \mathcal{C}_0$ y $B = \bigcup (\mathcal{C} - \mathcal{C}_0)$. Notemos que cualquier elemento de \mathcal{C} que intersecta a un elemento de \mathcal{C}_0 es en sí, un elemento de \mathcal{C}_0 . En efecto, consideramos C_r un elemento de \mathcal{C} que intersecta a algún $C_k \in \mathcal{C}_0$, entonces existe $\mathcal{L} = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ una cadena débil de C_1 a C_k . Así, $\mathcal{L}' = \{C_1, C_2, \dots, C_k, C_r\}$ es una cadena débil. Por lo tanto $A \cap B \neq \emptyset$. Como A y B son unión finita de subconjuntos cerrados de S , entonces A y B son cerrados en S . Dado que $S = \mathcal{U}\mathcal{C}$ tenemos que

$$(*) A \cup B = S.$$

Como $C_1 \in \mathcal{C}_0$ y $C_1 \neq \emptyset$, se tiene que $A \neq \emptyset$. Así, por (*) y la conexidad de S se obtiene que $B = \emptyset$. Por lo que $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_0$. Concluimos que $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$.

La demostración del lema, se sigue de la afirmación por repetidas aplicaciones del Lema 2.3.2. †

Teorema 2.3.4 (El Teorema de Hahn-Mazurkiewicz). *Todo continuo de Peano es una imagen continua del intervalo cerrado $[0, 1]$.*

Demostración:

La demostración de este teorema está basada en la construcción de una sucesión de funciones $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$, a las cuales, posteriormente se les aplicará el Teorema 1.5.4, donde X será igual al intervalo cerrado $[0, 1]$ y Y un continuo de Peano.

Dado que Y satisface el Teorema 2.2.11 y el Lema 2.3.3, podemos construir una cadena débil $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ de subcontinuos de Peano de Y que cubre a Y tal que cada A_i es de diámetro menor que 1.

Por otro lado, escribimos $[0, 1]$ como la unión de n subintervalos cerrados no degenerados I_1, I_2, \dots, I_n de la forma $I_i = [t_{i-1}, t_i]$, $1 \leq i \leq n$, donde $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1$.

Así, definimos $F_1 : [0, 1] \rightarrow C(Y)$ como sigue:

$$F_1(t) = \begin{cases} A_i, & \text{si } t \in I_i - \{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}\}, \\ A_i \cup A_{i+1}, & \text{si } t = t_i \text{ y } 1 \leq i \leq n, \\ A_1, & \text{si } t = 0 \text{ (} n = 1 \text{)}, \\ A_n, & \text{si } t = 1 \text{ (} n = 1 \text{)}. \end{cases}$$

Probaremos que F_1 cumple las hipótesis del Teorema 1.5.4, es decir, F_1 es *USC* y $Y = \bigcup_{x \in [0,1]} F_1(x)$.

(1) Veamos que F_1 es *USC*. Sea $p \in [0, 1]$ y U un abierto de Y tal que $F_1(p) \in U$. Nuestro fin ahora es encontrar un abierto V tal que $p \in V$ y $F_1(x) \subset U$ para todo $x \in V$. Como $p \in [0, 1]$, existe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $p \in I_i$. Por lo que consideraremos dos casos:

- (i) $p \in (t_{i-1}, t_i)$. Si esto ocurre, $F_1(p) = A_i$. Así, $V = (t_{i-1}, t_i)$. Si $x \in V$, entonces $F_1(x) = A_i$. Por lo que $F_1(x) \subset U$ para todo $x \in V$.
- (ii) En otro caso, si $p = t_i$, $F_1(p) = A_i \cup A_{i+1}$. Sea $V = (t_{i-1}, t_{i+1})$. Si $x \in V - \{p\}$, entonces
 - (a) $x \in (t_{i-1}, t_i)$ y $F_1(x) = A_i \subset A_i \cup A_{i+1} \subset U$.
 - (b) $x \in (t_i, t_{i+1})$ y $F_1(x) = A_{i+1} \subset A_i \cup A_{i+1} \subset U$.

Por lo que $F_1(x) \subset U$ para toda $x \in V$. Por lo anterior tenemos que F_1 es *USC*.

(2) Como $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ cubre a Y , se tiene que:

$$Y = \bigcup_{x \in [0,1]} F_1(x).$$

Para construir F_2 , consideremos $p_1 \in A_1$, $p_i \in A_i \cap A_{i-1}$ para $2 \leq i \leq n$ y $p_{n+1} \in A_n$. Sea $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, aplicando el Teorema 2.2.11 y el Lema 2.3.3 a A_i , tenemos una cadena débil $\{A_1^i, A_2^i, \dots, A_{m(i)}^i\}$ de subcontinuos de Peano de A_i tal que $p_i \in A_1^i$, $p_{i+1} \in A_{m(i)}^i$ y $A_i = \bigcup_{j=1}^{m(i)} A_j^i$. Además cada A_j^i con $1 \leq j \leq m(i)$, es de diámetro menor que $1/2$. Ahora, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ escribimos I_i como la unión de $m(i)$ subintervalos no degenerados $I_1^i, I_2^i, \dots, I_{m(i)}^i$, de la siguiente forma, $I_j^i = [t_{j-1}^i, t_j^i]$, $1 \leq j \leq m(i)$ donde $t_0^i = t_{i-1} < t_1^i < t_2^i < \dots < t_{m(i)}^i = t_i$.

Definimos $F_2 : [0, 1] \rightarrow C(Y)$ como sigue

$$F_2(t) = \begin{cases} A_j^i, & \text{si } t \in I_j^i - \{t_0^i, t_1^i, \dots, t_{m(i)}^i\}, \\ A_j^i \cup A_{j+1}^i, & \text{si } t = t_j^i \text{ y } 0 \leq j \leq m(i), \\ A_{m(i-1)}^{i-1} \cup A_1^i, & \text{si } t = t_0^i \text{ y } 2 \leq i \leq n, \\ A_1^1, & \text{si } t = 0, \\ A_{m(n)}^n, & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

La prueba de que F_2 cumple (1) y (3) del Teorema 1.5.4, es análoga a como se hizo para F_1 .

Continuando de esta manera, se construye F_n para $n = 3, 4, 5, \dots$ tal que (1)-(3) del Teorema 1.5.4 se satisfacen. Observemos que el diámetro de los eslabones de la cadena débil de subcontinuos de Peano en cada paso tiende a cero y cada $F_n(x)$ se queda contenida en los eslabones correspondientes, entonces el diámetro de los $F_n(x)$ tiende a cero. Así, F_n satisfice las hipótesis del Teorema 1.5.4 para cada n . Por lo tanto, hay una función continua del intervalo cerrado $[0, 1]$ al continuo de Peano Y , es decir, Y es imagen continua del intervalo cerrado $[0, 1]$. †

Lema 2.3.5. Sean S_1, S_2 dos espacios topológicos, y $f : S_1 \rightarrow S_2$ una función continua. Si C es una componente de S_2 , entonces $f^{-1}(C)$ es la unión de algunas componentes de S_1 .

Demostración:

Para la demostración basta probar que

$$f^{-1}(C) = \bigcup \{K : K \text{ es una componente de } S_1 \text{ y } K \cap f^{-1}(C) \neq \emptyset\}.$$

Si $x \in f^{-1}(C)$, entonces existe K^* una componente tal que $x \in K^*$ y además $K^* \cap f^{-1}(C) \neq \emptyset$.

Ahora, sea K una componente de S_1 , supongamos que $K \cap f^{-1}(C) = \emptyset$ entonces existe x , tal que $x \in K$ y $x \notin f^{-1}(C)$, de modo que existe $y \in S_2$, $f(x) = y \notin C$, así podemos ver a K como la unión de dos conjuntos ajenos no vacíos A y B , los cuales se construyen de la siguiente manera: $t \in A$ si $f(t) \in C$ y $t \in B$ si $f(t) \notin C$, pero esto es una contradicción ya que K es una componente. Por lo que $x \in f^{-1}(C)$ y así, $K \in f^{-1}(C)$. †

Proposición 2.3.6. *Si f es una función cerrada continua de un espacio de Peano X sobre un espacio métrico Y , entonces Y es un espacio de Peano.*

Demostración:

Por (2) del Teorema 2.1.3, basta probar que cada componente de cada subconjunto abierto de Y es abierto en Y .

Sea U un subconjunto abierto de Y y C una componente de U , por el Lema 2.3.5, $f^{-1}(C)$ es la unión de algunas componentes de $f^{-1}(U)$. Por ser f continua, $f^{-1}(U)$ es abierto en X . Como X satisface (2) del Teorema 2.1.3, se tiene que $f^{-1}(C)$ es abierto en X . Por lo que $X - f^{-1}(C)$ es cerrado en X . De que f es cerrada y $f(X - f^{-1}(C)) = Y - C$, entonces $Y - C$ es cerrado en Y . Por lo tanto, C es abierto en Y . †

Corolario 2.3.7. *Cualquier continuo de Hausdorff que es imagen de un continuo de Peano, es un continuo de Peano.*

Demostración:

Sean X un continuo de Hausdorff, Y un continuo de Peano y $f : Y \rightarrow X$ una función continua tal que $f(Y) = X$. Por el Teorema 1.5.5 se tiene que X es metrizable. Por lo que hay una función del continuo de Peano Y sobre el espacio métrico X . Así, por el Teorema 2.3.6, X es un continuo de Peano. †

Teorema 2.3.8. *Un continuo de Hausdorff es un continuo de Peano si y sólo si es imagen continua del intervalo cerrado $[0, 1]$.*

Demostración:

La necesidad se cumple por el Teorema 2.3.4, ya que todo continuo de Peano

es imagen continua del intervalo cerrado $[0, 1]$. La suficiencia se da por el Corolario 2.3.7. †

Teorema 2.3.9. *Cualesquiera dos continuos de Peano no degenerados son imagen continua uno del otro. De hecho: Si X y Y son continuos de Peano no degenerados, entonces, para cualesquiera n puntos ($n < \infty$) $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ y $y_1, y_2, \dots, y_n \in Y$, hay una función continua $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(x_i) = y_i$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$.*

Demostración:

Basta demostrar la segunda parte del teorema ya que f será la función que haga que Y sea la imagen continua de X .

Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow Y$ la función que existe por el Teorema de Hahn-Mazurkiewicz, tal que $\alpha(t_i) = y_i$ con $t_i \in [0, 1]$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Por otro lado, sean $p, q \in X - \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ con $p \neq q$, definamos $\beta : \{p, q, x_1, x_2, \dots, x_n\} \rightarrow [0, 1]$, tal que $\beta(p) = 0$, $\beta(q) = 1$ y $\beta(x_i) = t_i$. Entonces, por el Teorema de Extensión de Tietze, β se puede extender a una función continua de X sobre $[0, 1]$, digamos $\gamma : X \rightarrow [0, 1]$, la cual es una función suprayectiva dado que X es conexo y $0, 1 \in \gamma(X)$.

Consideremos $f = \alpha \circ \gamma$, entonces $f(x_i) = \alpha(\gamma(x_i)) = \alpha(t_i) = y_i$. Notemos que f es continua y suprayectiva. †

Capítulo 3

Algunas curvas que llenan el espacio

Finalmente, después de un largo camino para probar el Teorema de Hahn-Mazurkiewicz, tenemos la certeza de asegurar que existe una función continua del intervalo cerrado $I = [0, 1]$ al cuadrado $I^2 = [0, 1]^2$ es decir, podemos garantizar la existencia de las curvas que llenan el espacio, y a partir de ahora podemos dedicarnos a conocer algunos ejemplos de estas curvas, vamos a ello...

3.1. Curva de Hilbert

3.1.1. Generación de la curva de Hilbert

Aunque fue G. Peano quien descubrió la primera curva que llena el espacio, fue D. Hilbert quien hizo que este fenómeno arrojara bastante luz a la imaginación geométrica, ya que fue el primero en reconocer un procedimiento de generación geométrica, que permitió la construcción de toda una clase de curvas que llenan el espacio, procedimiento que describiremos brevemente a continuación.

Si el intervalo $I = [0, 1]$ puede ser mapeado sobre $I^2 = [0, 1]^2$ entonces al particionar I en cuatro subintervalos congruentes y a I^2 en cuatro subcuadrados congruentes, cada subintervalo puede ser mapeado continuamente sobre uno de los subcuadrados. Luego, cada subintervalo es particionado en cuatro y cada subcuadrado en cuatro subcuadrados congruentes y el argumento se

repite. Si esto es llevado al infinito, I y I^2 son particionados en 2^{2n} replicas congruentes para $n = 1, 2, 3, \dots$. Hilbert demostró que los subcuadrados se pueden organizar de manera que los subintervalos adyacentes correspondan a cuadrados adyacentes con un borde en común, y para que se conserven las relaciones de inclusión, es decir, si un cuadrado corresponde a un intervalo entonces sus subcuadrados corresponden a los subintervalos de ese intervalo. Indicamos en la Figura 3.1 cómo se debe llevar a cabo este proceso para los primeros tres pasos. Las líneas poligonales en negrita indican el orden en el que se deben tomar los subcuadrados para satisfacer nuestros requisitos y en la Figura 3.2 mostramos como sería el sexto paso de la generación de la curva de Hilbert.

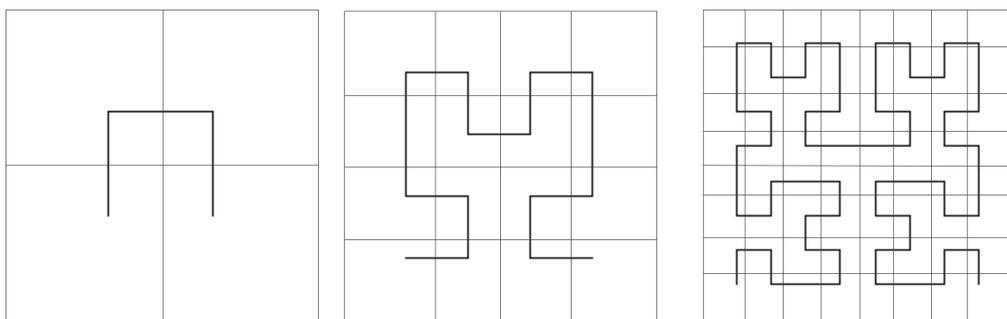


Figura 3.1: Generación de la curva de Hilbert que llena el espacio.

Ahora, con base en la descripción anterior, definiremos la función f_h de I sobre I^2 como sigue:

Cada $t \in I$ está determinado únicamente por una secuencia de intervalos cerrados anidados (que son generados por la partición sucesiva), las longitudes de los cuales se reducen a cero. A esta secuencia, corresponde una única secuencia de cuadrados cerrados anidados, las diagonales de los cuales se reduce a un punto, el cual es único en I^2 , la imagen $f_h(t)$. Denotamos por $f_h^*(t)$ a la **curva de Hilbert**. Si t es el punto final de uno de los subintervalos que no sea 0 o 1, entonces pertenece a dos secuencias diferentes de intervalos anidados. Sin embargo, dado que los intervalos adyacentes son mapeados en cuadrados adyacentes, esto conduce a la misma imagen.

Proposición 3.1.1. *La función $f_h : I \rightarrow I^2$ es suprayectiva, es decir, la curva de Hilbert pasa por cada punto del cuadrado I^2 .*

Demostración:

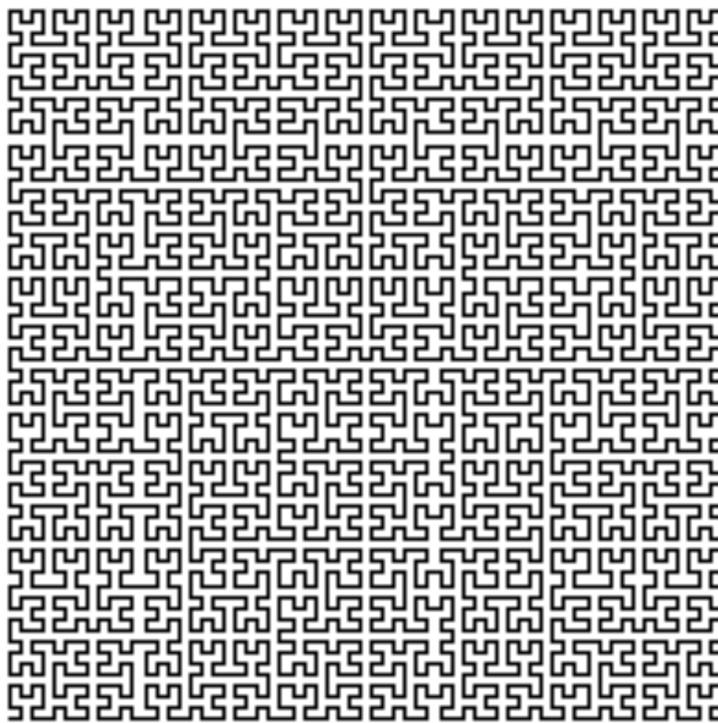


Figura 3.2: Sexto paso de la generación de la curva de Hilbert que llena el espacio.

Sea $(x, y) \in I^2$. Notemos que (x, y) pertenece a una secuencia de cuadrados cerrados anidados, cuya diagonal se contrae a un punto. Esta secuencia corresponde a una secuencia de subintervalos cerrados anidados cuya longitud se reduce a cero. Por lo tanto, define un único punto $t_0 \in I$ tal que $f_h(t_0) = (x, y)$. Entonces analicemos dos casos, (i) si (x, y) se encuentra en la esquina de un cuadrado, entonces será como ya lo mencionamos. (ii) Si se encuentra en la arista de un cuadrado, puede pertenecer al menos a dos cuadrados que no corresponden a intervalos consecutivos, tal punto puede verse como perteneciente a dos o más secuencias distintas de cuadrados cerrados anidados. Por lo tanto, tiene dos o más preimágenes distintas en I . Lo cual no debería ser una sorpresa en vista del Teorema 1.5.8. †

Proposición 3.1.2. *La función $f_h : I \rightarrow I^2$ es continua, es decir, $f_{h^*}(I)$ es una curva.*

Demostración:

En la n -ésima iteración, I es particionada en 2^{2n} subintervalos de longitud $\frac{1}{2^{2n}}$ cada uno. Elegimos $t_1, t_2 \in I$ tales que $|t_1 - t_2| < \frac{1}{2^{2n}}$, entonces el intervalo $[t_1, t_2]$ se supone con, a lo más, dos subintervalos consecutivos. Además, las imágenes se encuentran, en el peor de los casos, en dos cuadrados consecutivos de longitud lateral $1/2^n$ que forman un rectángulo con diagonal de longitud $\sqrt{5}/2^n$. Por tanto, $\|f_h(t_1) - f_h(t_2)\| \leq \sqrt{5}/2^n$. Así, $f_h : I \rightarrow I^2$ es continua. †

Teorema 3.1.3. *La curva de Hilbert es una curva que llena el espacio, es decir, $f_h * (I) = I^2$*

Demostración:

Este teorema es consecuencia de la Proposición 3.1.1 y la Proposición 3.1.2. †

El Teorema 3.1.3 garantiza la existencia de una función continua que llena al espacio I^2 , una pregunta interesante sería saber si esta función podría ser diferenciable. El siguiente Teorema nos asegura que no es así, es decir las funciones coordenadas de la función f_h^* no son diferenciables.

Teorema 3.1.4. *Las funciones coordenadas de la curva de Hilbert $f_h^*(t) = (\varphi_h, \psi_h(t))$ no son diferenciables en ningún punto.*

Demostración:

Sea $n \geq 3$, para cualquier $t \in I$, elegimos $t_n \in I$ tal que $|t - t_n| \leq 10/2^{2n}$ y las coordenadas $\varphi_h(t), \psi_h(t)$ de la imagen de t están separadas de las coordenadas $\varphi_h(t_n), \psi_h(t_n)$ de la imagen de t_n por al menos un cuadrado de longitud lateral $1/2^n$, es decir, $|\varphi_h(t) - \varphi_h(t_n)| \geq 1/2^n$. Entonces,

$$\frac{|\varphi_h(t) - \varphi_h(t_n)|}{|t - t_n|} \geq \frac{2^{2n}}{10} \left(\frac{1}{2^n} \right) = \frac{2^n}{10}.$$

Un argumento análogo se aplica a la segunda componente ψ_h . †

3.1.2. Una representación compleja

Hemos podido establecer todas las propiedades requeridas de la curva de Hilbert y su diferenciability en ninguna parte, sólo sobre la base de su definición mediante un proceso geométrico. Todavía no sabemos cómo calcular

las coordenadas del punto imagen de cualquier $t \in I$, que no sea contando cuadrados. Sin embargo, esto solo es práctico cuando t se encuentra en el punto final (o punto inicial) de uno de los 2^{2n} subintervalos de la partición de I y n es “pequeño”. Aparentemente, no se ha intentado una representación aritmética-analítica de la curva de Hilbert durante los últimos 100 años en la creencia de que tal intento sería muy tedioso. En 1949, Émilie Borel casi tuvo éxito cuando dió una descripción aritmética de la curva de Hilbert. Fue tedioso de hecho.

A continuación mostraremos los primeros pasos para una representación compleja de la curva de Hilbert, sin embargo se omitirá dar la descripción completa, ya que el proceso es muy largo y queda fuera de las expectativas de este trabajo.

Mirando la Figura 3.1, vemos que la curva de Hilbert se origina en el subcuadrado inferior izquierdo y termina en el subcuadrado inferior derecho. Como los cuadrados se reducen a puntos, se deduce que la curva de Hilbert comienza en el origen (punto de entrada en I^2) y termina en el punto $(1, 0)$ (punto de salida de I^2). El subcuadrado coincide con el punto de entrada del siguiente subcuadrado. En la Figura 3.3 hemos indicado la orientación correcta del subcuadrado mediante flechas en negrita para los primeros dos pasos del proceso de iteración. Para obtener la configuración en la Figura 3.3(b) tenemos que someter a I^2 en la Figura 3.3(a) a las siguientes transformaciones: Usando representación compleja, con $z \in \mathbb{C}$, primero reducimos I^2 en el radio 2 : 1 uniformemente hacia el origen: $z' = \frac{1}{2}z$. Entonces, rotamos el cuadrado resultante 90° : $z'' = z'i$, y finalmente, reflejamos en el eje imaginario: $z''' = \bar{z}''$. Combinando estas tres transformaciones y nombrando la transformación compuesta \mathfrak{H}_0 , obtenemos

$$\mathfrak{H}_0(z) = \frac{1}{2}\bar{z}i.$$

Esto produce el cuadrado en la esquina inferior izquierda de la Figura 3.3 (b). Para obtener el cuadrado en la esquina superior izquierda de la Figura 3.3(b), reducimos I^2 como antes, y luego cambiamos $\frac{1}{2}$ de unidad hacia arriba. Esto produce la transformación

$$\mathfrak{H}_1(z) = \frac{1}{2}z + \frac{i}{2}.$$

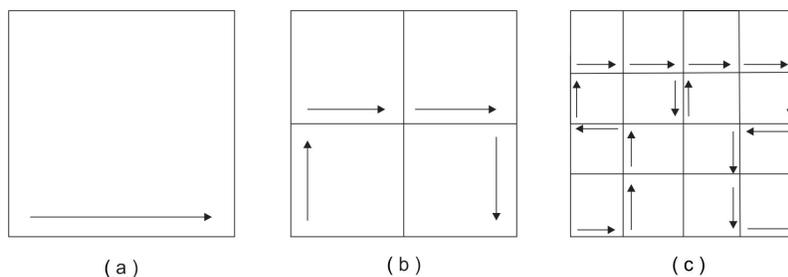


Figura 3.3: Mapeo del cuadrado

El siguiente cuadrado en la esquina superior derecha es obtenida reduciendo I^2 y desplazándolo $\frac{1}{2}$ de unidad hacia arriba y $\frac{1}{2}$ de unidad hacia a la derecha

$$\mathfrak{H}_2(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}.$$

Finalmente, obtenemos el cuadrado en la esquina inferior derecha de la Figura 3.3(b) reduciendo I^2 , rotando -90° ($z' = -\frac{1}{2}zi$), reflejando en el eje imaginario ($z'' = -\bar{z}'$), y desplazando el resultado una unidad hacia la derecha y $\frac{1}{2}$ de unidad hacia arriba para obtener

$$\mathfrak{H}_3(z) = -\frac{1}{2}\bar{z}i + 1 + \frac{i}{2}.$$

La aplicación de estas cuatro transformaciones a la Figura 3.3(a) produce la Figura 3.3(b). La aplicación a la Figura 3.3(b) produce la Figura 3.3(c) y así sucesivamente.

Una curva de Hilbert tridimensional.

Para definir la curva de Hilbert tridimensional, podemos como en la Sección 3.1.1, excepto porque ahora dividimos en cada paso a $I = [0, 1]$ en 2^{3n} subintervalos congruentes y, por consiguiente, el cubo $W = [0, 1]^3$ en 2^{3n} subcubos congruentes. En el primer paso alineamos los subcubos, como se indica en la Figura 3.4. La línea poligonal une los puntos medios de los ocho subcubos en el orden deseado, el siguiente paso es ilustrado en la Figura 3.5 donde hemos dibujado varias veces la línea poligonal obtenida en el proceso anterior con líneas en negrita y los conectores con líneas finas (hemos omitido los contornos del cuadrado, los subcuadrados y los ejes coordenados para

evitar sobrecargar la figura).

Este proceso satisface nuestros requisitos para la definición de una curva que llena el espacio: subintervalos adyacentes mapeados en subcubos adyacentes con una cara común y cada mapeo conserva el anterior.

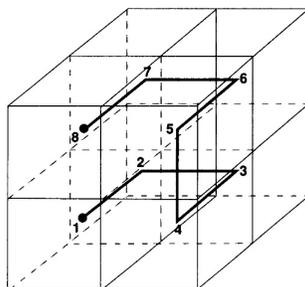


Figura 3.4: Primer paso de la generación de la curva de Hilbert tridimensional.

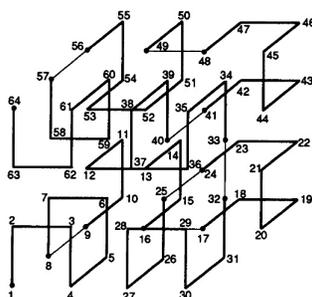


Figura 3.5: Segundo paso de la generación de la curva de Hilbert tridimensional.

3.2. Curva de Peano

3.2.1. Definición de la curva de Peano

G. Peano define una función continua f_p de I a I^2 en terminos del operador

$$k(t_j) = 2 - t_j, \quad j = 0, 1, 2$$

como sigue

$$f_p(0_3 \cdot t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 \cdots) = \begin{pmatrix} 0_3 \cdot t_1(k^{t_2}(t_3))(k^{t_2+t_4}(t_5)) \cdots \\ 0_3 \cdot (k^{t_1}(t_2))(k^{t_1+t_3}(t_4)) \cdots \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

Donde $0_3 \cdot t_1 t_2 t_3 \cdots = \frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{3^2} + \frac{t_3}{3^3} + \cdots$, $t_j = 0, 1$ o 2 denota un ternario y k^v la v -ésima iteración de k . Nuestro objetivo ahora es probar que f_p es suprayectiva y continua.

Proposición 3.2.1.

$$k^v(t_j) = 1 + (-1)^v(t_j - 1).$$

Demostración:

Por inducción matemática

- Para $v = 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} k^v(t_j) &= (1) + (-1)^1(t_j - 1) \\ &= 1 + (-1)(t_j - 1) \\ &= 1 - t_j + 1 \\ &= 2 - t_j \end{aligned}$$

- Supongamos que $k^v(t_j) = 1 + (-1)^v(t_j - 1)$ entonces,

$$\begin{aligned} k^{v+1}(t_j) &= k(k^v(t_j)) \\ &= k(1 + (-1)^v(t_j - 1)) \\ &= 1 + (-1)((1 + (-1)^v(t_j - 1)) - 1) \\ &= 1 + [(-1)((-1)^v(t_j - 1))] \\ &= 1 + (-1)^{v+1}(t_j - 1). \end{aligned}$$

†

Dado que cada ternario finito también puede escribirse como un ternario infinito con infinitos 3's entonces,

$$0_3 \cdot t_1 t_2 t_3 \cdots t_n t = 0_3 \cdot t_1 t_2 t_3 \cdots t_n (t - 1) \bar{2}.$$

Tenemos que asegurarnos que el valor de f_p es independiente de la representación. Asumimos, por el momento que $n = 2m$ y para obtener la primer componente coordenada φ_p de f_p de (3.1), usamos la siguiente notación, $\tau = t_2 + t_4 + \cdots + t_{2m}$, así:

$$\begin{aligned} \varphi(0_3 \cdot t_1 t_2 t_3 \cdots t_n t) &= 0_3 \cdot t_1(k^{t_2}(t_3))(k^{t_2+t_4}(t_5)) \cdots (k^\tau(t)) \overline{(k^\tau(0))} \\ &= \begin{cases} 0_3 \cdot t_1(k^{t_2}(t_3))(k^{t_2+t_4}(t_5)) \cdots t & \text{si } \tau \text{ es par} \\ 0_3 \cdot t_1(k^{t_2}(t_3)) \cdots (k^{t_2+\cdots+t_{2m-2}}(t_{2m-1}))(3-t) & \text{si } \tau \text{ es impar} \end{cases} \end{aligned}$$

Esto ya que por la Proposición 3.2.1 tenemos:

- Si τ es par,

$$\begin{aligned} k^\tau(t) &= 1 + (-1)^\tau(t-1) = 1 + (t-1) = t \quad y \\ k^\tau(0) &= 1 + (-1)^\tau(0-1) = 1 + (0-1) = 0. \end{aligned}$$

- Si τ es impar,

$$\begin{aligned} k^\tau(t) &= 1 + (-1)^\tau(t-1) = 1 + (-1)(t-1) = 2-t \quad y \\ k^\tau(0) &= 1 + (-1)^\tau(0-1) = 1 + (-1)(0-1) = 2. \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi(0_3 \cdot t_1 t_2 t_3 \cdots t_n (t-1) \overline{2}) &= \\ &= 0_3 \cdot t_1(k^{t_2}(t_3))(k^{t_2+t_4}(t_5)) \cdots (k^\tau(t-1))(k^{\tau+2}(2))(k^{\tau+4}(2)) \cdots \\ &= \begin{cases} 0_3 \cdot t_1(k^{t_2}(t_3))(k^{t_2+t_4}(t_5)) \cdots (t-1) \overline{2} = \\ 0_3 \cdot t_1(k^{t_2}(t_3)) \cdots t, & \text{si } \tau \text{ es par} \\ 0_3 \cdot t_1(k^{t_2}(t_3))(k^{t_2+t_4}(t_5)) \cdots (2-(t-1)) = \\ 0_3 \cdot t_1(k^{t_2}(t_3))(k^{t_2+t_4}(t_5)) \cdots (3-t), & \text{si } \tau \text{ es impar} \end{cases} \end{aligned}$$

pues si hacemos como en el caso anterior tenemos que:

- Si τ es par,

$$\begin{aligned} k^\tau(t-1) &= 1 + (-1)^\tau((t-1)-1) = 1 + (t-2) = t-1 \quad y \\ k^{\tau+2}(2) &= 1 + (-1)^\tau(2-1) = 1 + (1) = 2. \end{aligned}$$

- Si τ es impar,

$$\begin{aligned} k^\tau(t-1) &= 1 + (-1)^\tau((t-1) - 1) = 1 + (-1)(t-2) \\ &= 1 - t + 2 = 2 - (t-1) = 3 - t \quad \text{y} \\ k^{\tau+2}(2) &= 1 + (-1)^{\tau+2}(2-1) = 1 + (-1)(1) = 0. \end{aligned}$$

El caso para $n = 2m + 1$ y la segunda componente coordenada ψ_p de f_p son análogos. Así, procederemos en el entendimiento de que obtenemos el mismo valor de f_p de cualquier manera.

Proposición 3.2.2. *La función f_p como se define en (3.1) es suprayectiva.*

Demostración:

Sea

$$(0_3 \cdot \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4 \cdots, 0_3 \cdot \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 \cdots) \in I^2.$$

Tenemos que probar que hay un $t = 0_3 \cdot t_1t_2t_3t_4 \cdots \in I$ tal que

$$f_p(t) = \begin{pmatrix} 0_3 \cdot \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4 \cdots \\ 0_3 \cdot \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 \cdots \end{pmatrix}.$$

Ahora, comparando los lugares ternarios correspondientes, obtenemos con $t_0 = 0$

$$\begin{aligned} \beta_n &= k^{t_0+t_2+t_4+\cdots+t_{2n-2}}(t_{2n-1}), \\ \gamma_n &= k^{t_0+t_2+t_4+\cdots+t_{2n-2}}(t_{2n}). \end{aligned}$$

Señalando que $k \circ k(t_j) = k(k(t_j)) = 2 - k(t_j) = 2 - (2 - t_j) = t_j$ tenemos que k es su propia inversa. Así,

$$\begin{aligned} t_{2n-1} &= k^{t_0+t_2+t_4+\cdots+t_{2n-2}}(t_{\beta_n}), \\ t_{2n} &= k^{t_0+t_2+t_4+\cdots+t_{2n-2}}(t_{\gamma_n}), \end{aligned}$$

lo cual podemos resolver sucesivamente para t_1, t_2, t_n, \dots †

Proposición 3.2.3. *La función f_p como se define en (3.1) es continua.*

Demostración:

La prueba que se dará a continuación es la prueba más convincente dada por Federico Prat-Villar de la Universidad Politécnica de Valencia, España.

Probaremos primero que φ_p es continua por la derecha para todo $t \in [0, 1)$.

Sea

$$t_0 = 0_3 \cdot t_1 t_2 t_3 \cdots t_{2n} t_{2n+1} \cdots$$

la representación de t_0 que no tiene infinitos 2's finales y sea

$$\delta = \frac{1}{3^{2n}} - 0_3 \cdot 000 \cdots t_{2n+1} t_{2n+2} \cdots$$

dado que

$$\begin{aligned} t_0 + \delta &= 0_3 \cdot t_1 t_2 t_3 \cdots t_{2n} t_{2n+1} \cdots - 0_3 \cdot 000 \cdots t_{2n+1} t_{2n+2} \cdots \\ &= 0_3 \cdot t_1 t_2 t_3 \cdots t_{2n} + \frac{1}{3^{2n}} \\ &= 0_3 \cdot t_1 t_2 t_3 \cdots t_{2n} \bar{2}, \end{aligned}$$

cualquier $t \in [t_0, t_0 + \delta)$ tiene que estar de acuerdo con t_0 en los primeros $2n$ dígitos después del punto ternario.

Considerando $t = 0_3 \cdot t_1 t_2 t_3 \cdots t_{2n} \tau_{2n+1} + \tau_{2n+2} \cdots$, con $\epsilon = t_2 + t_4 + t_6 + \cdots + t_{2n}$, tenemos que

$$|\varphi(t) - \varphi(t_0)|$$

$$\begin{aligned} &= |0_3 \cdot t_1 (k^{t_2}(t_3)) \cdots (k^\epsilon(\tau_{2n+1})) \cdots - 0_3 \cdot t_1 (k^{t_2}(t_3)) \cdots (k^\epsilon(t_{2n+1})) \cdots| \\ &= \left| \frac{k^\epsilon(\tau_{2n+1})}{3^{n+1}} + \frac{k^{\epsilon+t_{2n+2}}(\tau_{2n+3})}{3^{n+2}} + \cdots - \frac{k^\epsilon(t_{2n+1})}{3^{n+1}} - \frac{k^{\epsilon+t_{2n+2}}(t_{2n+3})}{3^{n+2}} - \cdots \right| \\ &\leq \frac{|k^\epsilon(\tau_{2n+1}) - k^\epsilon(t_{2n+1})|}{3^{n+1}} + \frac{|k^{\epsilon+t_{2n+2}}(\tau_{2n+3}) - k^{\epsilon+t_{2n+2}}(t_{2n+3})|}{3^{n+2}} + \cdots \end{aligned}$$

Observemos que:

- Si w es par,

$$\begin{aligned} k^w(t_{2n+1}) &= 1 + (-1)^w(t_{2n+1} - 1) = 1 + (t_{2n+1} - 1) = t_{2n+1} \quad \text{y} \\ k^w(\tau_{2n+1}) &= 1 + (-1)^w(\tau_{2n+1} - 1) = 1 + (\tau_{2n+1} - 1) = \tau_{2n+1}. \end{aligned}$$

- Si w es impar,

$$\begin{aligned} k^w(t_{2n+1}) &= 1 + (-1)^w(t_{2n+1} - 1) = 1 + (-1)(t_{2n+1} - 1) = 2 - t_{2n+1} \quad \text{y} \\ k^w(\tau_{2n+1}) &= 1 + (-1)^w(\tau_{2n+1} - 1) = 1 + (-1)(\tau_{2n+1} - 1) = 2 - \tau_{2n+1}. \end{aligned}$$

Para lo cual tendremos que

$$\begin{aligned} |\tau_{2n+1} - t_{2n+1}| &\leq 2 \quad \text{y} \\ |2 - \tau_{2n+1} - (2 - t_{2n+1})| &= |t_{2n+1} - \tau_{2n+1}| \leq 2, \end{aligned}$$

esto debido a que tanto τ_{2n+1} como t_{2n+1} sólo pueden tomar los valores 0, 1 o 2. Así,

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \varphi(t_0)| &\leq \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+2}} + \frac{2}{3^{n+3}} + \cdots \\ &\leq \left(\frac{2}{3^{n+1}}\right) \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots\right) \\ &= \left(\frac{2}{3^{n+1}}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{1}{3^n}. \end{aligned}$$

Dada $\epsilon > 0$, por la propiedad arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^n} < \epsilon$ para toda $n \geq N$. Considerando δ como antes se tiene que φ_p es continua por la derecha.

Para mostrar que φ_p es continua por la izquierda en $(0, 1]$ elegimos la representación ternaria de t_0 que no es finita y a $\delta = 0_3 \cdot 00 \cdots 0 \cdots t_{2n+1}t_{2n+2} \cdots$. Entonces, $t_0 - \delta = 0_3 \cdot t_1t_2t_2 \cdots t_{2n}$ y vemos, como antes, que $t \in (t_0 - \delta, t_0]$, su representación ternaria tiene $2n$ dígitos después del punto ternario y procedemos como antes.

Dado que φ_p es continua por la derecha en $[0, 1)$ y por la izquierda en $(0, 1]$ es continua en $[0, 1]$.

La continuidad de ψ_p se sigue de que $\psi_p(t) = 3\varphi_p(t/3)$.

Veamos que $\psi_p(t) = 3\varphi_p(t/3)$.

Dado $t = 0_3 \cdot t_1t_2t_3 \cdots$, tenemos que

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{3} \left(\frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{3^2} + \frac{t_3}{3^3} + \cdots \right) \\ &= \frac{t_1}{3^2} + \frac{t_2}{3^3} + \frac{t_3}{3^4} + \cdots \\ &= 0_3 \cdot 0t_1t_2t_3 \cdots \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
 3\varphi(t/3) &= 3(0_3 \cdot 0(k^{t_1}(t_2))(k^{t_1+t_3}(t_4)) \cdots) \\
 &= 3\left(\frac{0}{3} + \frac{k^{t_1}(t_2)}{3^2} + \frac{k^{t_1+t_3}(t_4)}{3^3} + \cdots\right) \\
 &= \left(\frac{k^{t_1}(t_2)}{3} + \frac{k^{t_1+t_3}(t_4)}{3^2} + \cdots\right) \\
 &= 0_3 \cdot (k^{t_1}(t_2))(k^{t_1+t_3}(t_4)) \cdots \\
 &= \psi_p.
 \end{aligned}$$

†

Por la Proposición 3.2.2 y la Proposición 3.2.3 obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.2.4. *La función $f_p : I \rightarrow I^2$ como se define en (3.1), representa una curva que llena el espacio a la que llamamos **la curva de Peano**.*

3.2.2. La no diferenciabilidad de la curva de Peano

Es digno de mención que Peano considera necesario dar una explicación elaborada de la representación ternaria de un número, pero deja mucho que pensar respecto a su afirmación de la no diferenciabilidad de su curva con solo una oración, la última oración en su artículo: “Estas φ e ψ , funciones continuas de la variable t , carecen de un derivado por completo”. No fue sino hasta diez años después, Moore publicó una prueba de la no diferenciabilidad de la curva de Peano en [4]. Nunca sabremos cómo Peano se convenció a sí mismo de la no diferenciabilidad en ninguna parte de su curva, pero su prueba no podría haber sido más simple que la que se ofrece en [7], y que reproduciremos aquí.

Teorema 3.2.5. *La curva de Peano como se define en (3.1), no es diferenciable en ningún punto.*

Demostración:

Para cualquier $t = 0_3 \cdot t_1 t_2 t_3 \cdots t_{2n} t_{2n+1} t_{2n+2} \cdots \in [0, 1]$, definimos

$$t_n = 0_3 \cdot t_1 t_2 t_3 \cdots t_{2n} \tau_{2n+1} t_{2n+2} \cdots$$

donde $\tau_{2n+1} = t_{2n+1} + 1 \pmod{2}$. Veamos los posibles casos para esta igualdad

- Si $t_{2n+1} = 0$, entonces $\tau_{2n+1} = 1$;
- Si $t_{2n+1} = 1$, entonces $\tau_{2n+1} = 0$;
- Si $t_{2n+1} = 2$, entonces $\tau_{2n+1} = 1$.

Ahora,

$$\begin{aligned} |t - t_n| &= \left| \left(\frac{t_1}{3} + \cdots + \frac{t_{2n}}{3^{2n}} + \frac{t_{2n+1}}{3^{2n+1}} + \cdots \right) - \left(\frac{t_1}{3} + \cdots + \frac{t_{2n}}{3^{2n}} + \frac{\tau_{2n+1}}{3^{2n+1}} + \cdots \right) \right| \\ &= \left| \frac{t_{2n+1}}{3^{2n+1}} - \frac{\tau_{2n+1}}{3^{2n+1}} \right| = \frac{1}{3^{2n+1}} |t_{2n+1} - \tau_{2n+1}| \\ &= \frac{1}{3^{2n+1}}. \end{aligned}$$

Por la definición de f_p , $\varphi_p(t)$ y $\varphi_p(t_n)$ sólo difieren en el $(n+1)$ -ésimo lugar ternario. Por lo que

$$|\varphi_p(t) - \varphi_p(t_n)| = |k^{t_2 + \cdots + t_{2n}}(t_{2n+1}) - k^{t_2 + \cdots + t_{2n}}(\tau_{2n+1})| = \frac{1}{3^{2n+1}}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{|\varphi_p(t) - \varphi_p(t_n)|}{|t - t_n|} = 3^n$$

lo cual tiende a infinito, por lo que el límite no existe, es decir, φ_p no es diferenciable.

La no diferenciable de ψ_p se sigue de que $\psi_p(t) = 3\varphi_p(t/3)$. †

Generación geométrica de la curva de Peano

Aunque no hay indicios de que se pueda encontrar una interpretación geométrica de la curva de Peano, Hilbert fue indudablemente llevado a su principio generador por la siguiente consideración:

Por (3.1),

$$f_p(0_3 \cdot 00t_3t_4t_5 \cdots) = \begin{pmatrix} 0_3 \cdot 0\xi_2\xi_3\xi_4 \cdots \\ 0_3 \cdot 0\eta_2\eta_3\eta_4 \cdots \end{pmatrix},$$

lo que significa que el intervalo $[0, \frac{1}{9}]$ está mapeado en el subcuadrado número 1 de la Figura 3.6. De la misma manera,

$$f_p(0_3 \cdot 01t_3t_4t_5 \cdots) = \begin{pmatrix} 0_3 \cdot 0\xi'_2\xi'_3\xi'_4 \cdots \\ 0_3 \cdot 1\eta'_2\eta'_3\eta'_4 \cdots \end{pmatrix},$$

lo que significa que el intervalo $[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$ es mapeado en el subcuadrado número 2 de la Figura 3.6. Continuando de esta forma, nos damos cuenta de que el intervalo $[\frac{j-1}{9}, \frac{j}{9}]$, $j = 1, 2, 3, \dots, 9$ es mapeado en el subcuadrado número j de la Figura 3.6.

Esto sugiere que podemos obtener la curva de Peano si dividimos el intervalo I en 3^{2n} subintervalos congruentes y los mapeamos en 3^{2n} , $n = 1, 2, 3, \dots$ subcuadrados congruentes en el orden en que hemos indicado en la Figura 3.7 para los primeros 3 pasos.

Nuestras condiciones para la generación de una curva que llena el espacio parecen cumplirse: los intervalos adyacentes se mapean en cuadrados adyacentes con un borde en común, y cada mapeo conserva el anterior. Podemos, por lo tanto, definir un mapeo $g_p : I \rightarrow I^2$ como en la Sección 3.1.1 y mostrar, tal como lo hicimos entonces, que el mapeo es suprayectivo y continuo, es decir, representa una curva que llena el espacio.

3	4	9
2	5	8
1	6	7

Figura 3.6: Indicaciones del mapeo de Peano.

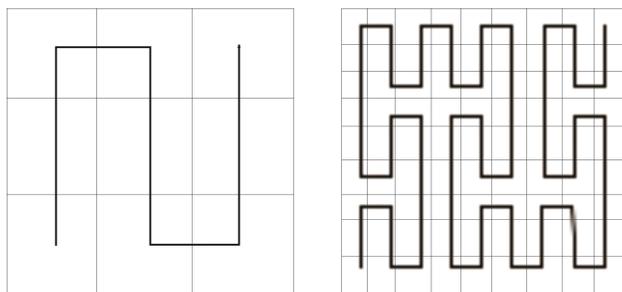


Figura 3.7: Generación geométrica de la curva de Peano.

Bibliografía

- [1] H. Hahn, *Mengentheoretische charakterisierung der stetigen kurve*, Sitzungsberichte, Akad. der Wissenschaften 123 (1914), 2433-2489.
- [2] M. J. Mansfield, *Introducción a la Topología*. Alhambra, Madrid, 1974.
- [3] S. Mazurkiewicz, *Sur les lignes de Jordan*, Fund. Math. 1 (1920), 166-209.
- [4] E. H. Moore, *On certain crinkly curves*, Trans. Amer. Math. Soc. 1 (1900), 72-90.
- [5] J. R. Munkres, *Topología*, Segunda edición, Pearson Educación S.A., España, Madrid 2002.
- [6] S. B. Nadler, Jr., *Continuum theory; an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., vol.158 (1992), Marcel Dekker, Inc. New York, N.Y.
- [7] H. Sagan, *Advanced Calculus*, Houghton-Mifflin Company, Boston, 1974.
- [8] H. Sagan, *Space-Filling Curves*, Springer-Verlag, 1994.